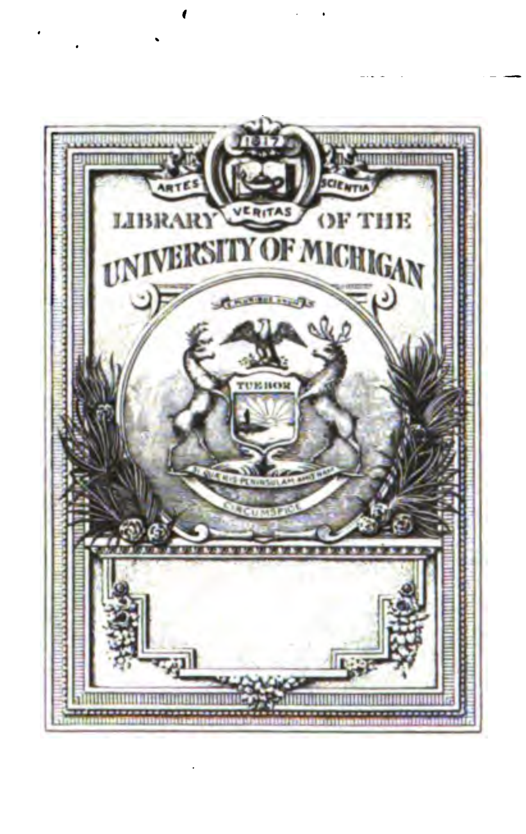

1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

COURS
DE MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DU
CORPS ROYAL DE L'ARTILLERIE.

TOME TROISIÈME.

Contenant les Principes généraux de la MÉCANIQUE, & l'HYDROSTATIQUE; précédés des Principes de Calcul qui servent d'introduction aux Sciences Physico-mathématiques.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie royale des Sciences & de celle de Marine, Examinateur des Elèves & des Aspirans du Corps royal de l'Artillerie, & des Gardes du Pavillon & de la Marine; Censeur royal.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE PH.-D. PIERRES,
Premier Imprimeur Ordinaire du Roi, rue S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.
Avec Approbation, & Privilége du Roi.

AVERTISSEMENT.

Nous avons fait précéder les Principes généraux de la Mécanique, des Principes de Calcul qui servent d'introduction aux Sciences Physico-mathématiques, à cause de l'utilité de ces calculs dans la Mécanique. Ayant fait la même chose dans le Cours à l'usage de la Marine, quelques personnes ont pensé que nous avions assujetti l'étude des Principes de la Mécanique à ces calculs : c'est une erreur que nous croyons devoir prévenir ici. Tout ce que l'on trouve ordinairement dans les Livres de Mécanique, expliqué sans le secours de ces calculs, se trouve également ici expliqué sans ces mêmes calculs ; ensorte que ceux qui veulent se borner à ce que l'on trouve le plus communément dans les Livres, se satisferont en passant tout ce qui portera l'empreinte de ces méthodes.

PRINCIPES



PRINCIPES DE CALCUL,

Qui servent d'Introduction aux Sciences Physico-mathématiques.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. NOUS avons donné jusqu'ici les règles nécessaires pour calculer les quantités, dans tel état de grandeur qu'on puisse les supposer. Mais nous n'avons point considéré les variations par lesquelles ces quantités arrivent à tel ou tel état de grandeur. Ce nouvel objet à considérer dans les quantités, donne lieu à une autre branche de l'Analyse, qui est de la plus grande utilité dans les Sciences Physico-mathématiques & principalement dans la Méchanique, où l'on ne par-

vient ſouvent à déterminer les rapports des quantités qui entrent dans les queſtions relatives à cette ſcience, qu'après avoir conſidéré les rapports de leurs variations, c'eſt-à-dire, des accroiſſemens ou des diminutions qu'elles reçoivent à chaque inſtant.

Nous allons donc, avant que d'entrer en Mécanique, nous arrêter quelques momens ſur cette partie du calcul qui a pour objet de décompoſer les quantités juſques dans leurs Élémens, & de revenir de ces Élémens aux quantités mêmes. A proprement parler, ce n'eſt point une nouvelle méthode de calcul, que nous allons expoſer; c'eſt une application des méthodes de la troiſième partie, & même une ſimplification de ces règles.

2. Nous nous propoſons deux objets. Le premier, d'enſeigner à deſcendre des quantités à leurs Elémens: & la méthode pour y parvenir s'appelle Calcul *différentiel.* Le ſecond nous montrera la route pour revenir des Elémens des quantités, aux quantités mêmes, & nous appellerons cette méthode Calcul *intégral.*

3. Comme nous allons conſidérer les quantités relativement à leurs Elémens, c'eſt-à-dire, relativement à leurs accroiſſemens infiniment petits, il convient, avant que d'aller plus loin, d'expoſer ce que nous entendons par quantités infiniment

petites, infinies, &c. & de faire connoître la subordination qu'on doit mettre entre ces quantités dans le calcul.

Nous disons qu'une quantité est infinie ou infiniment petite à l'égard d'une autre, lorsqu'il n'est pas possible d'assigner aucune quantité assez grande ou assez petite pour exprimer le rapport de ces deux-là, c'est-à-dire, le nombre de fois que l'une contient l'autre.

4. Comme une quantité ne peut, sans cesser d'être quantité, cesser d'être susceptible d'augmentation ou de diminution, il n'y a point de quantité si petite ou si grande à l'égard d'une autre, que l'on ne puisse en concevoir une troisième infiniment plus petite ou plus grande.

Par exemple, si x est infinie à l'égard de a, quoique dès-lors il soit impossible d'assigner leur rapport, cela n'empêche point que je ne puisse concevoir une troisième quantité qui soit à l'égard de x, ce que x est à l'égard de a : c'est-à-dire, qui soit le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seroient $a : x :: x :$; ce quatrième terme qui est $\frac{x^2}{a}$, sera donc infiniment plus grand que x puisqu'il contient x autant que x est supposé contenir a. De même, rien ne m'empêche de concevoir le quatrième terme de cette proportion $x : a :: a :$; & ce quatrième terme qui sera $\frac{a^2}{x}$, sera infiniment plus petit que a, puisqu'il doit être

contenu dans a, autant que celui-ci est supposé contenu dans x. Rien ne borne l'imagination à cet égard, & l'on peut concevoir de même une nouvelle quantité qui soit encore infiniment plus petite à l'égard de $\frac{a^2}{x}$, que celle-ci ne l'est à l'égard de a. On appelle cela des *infinis* ou des *infiniment petits* de différens ordres.

En général le produit de deux quantités infinies ou infiniment petites du premier ordre est infiniment plus grand ou infiniment plus petit que chacun de ses deux facteurs.

En effet, $xy : y :: x : 1$; or si x est infini, il contient une infinité de fois l'unité; donc xy contient une infinité de fois y.

Un raisonnement semblable fait voir qu'un produit ou une puissance de tant de dimensions qu'on voudra, & dont tous les facteurs sont infinis du premier ordre, est d'un ordre d'infini marqué par le nombre de ses facteurs.

Ainsi lorsque x est infini, x^4 est infini du quatrième ordre, c'est-à-dire, infiniment plus grand que x^3, qui est infiniment plus grand que x^2, qui lui-même est infiniment plus grand que x. En effet $x^4 : x^3 :: x^3 : x^2 :: x^2 : x :: x : 1$. Ce seroit le contraire si x étoit infiniment petit; alors x^4 seroit infiniment petit du quatrième ordre, c'est-à-dire, infiniment plus petit que x^3; celui-ci infiniment plus petit que x^2, & ce dernier infiniment plus petit que x.

Mais si un produit n'a pas tous ses facteurs infinis, alors son ordre d'infini ne doit se déterminer que par le nombre de ses facteurs infinis.

Ainsi axy n'est que du même ordre que xy; en effet $axy : xy :: a : 1$, & ce dernier rapport peut être évalué, si a est une quantité finie.

Remarquons bien cette différence dans la comparaison des infinis ou infiniment petits; entr'eux ou à l'égard des quantités relativement auxquelles ils sont infinis ou infiniment petits. Si x est infini à l'égard de a, rien ne peut mesurer leur rapport; mais dans la même supposition, le rapport de x à x multiplié ou divisé par tel nombre fini que l'on voudra, est un rapport fini; ainsi x infini ou infiniment petit est incomparable à l'égard de a, supposé un nombre fini; mais il ne l'est point à l'égard de ax, puisque x est à $ax :: 1 : a$.

5. Pour exprimer par le calcul, qu'une quantité x est infinie à l'égard d'une autre quantité a; ou, ce qui est la même chose, pour exprimer que a est infiniment petit à l'égard de x, il faut, dans l'expression algébrique où ces quantités se trouveroient ensemble, rejeter toutes les puissances de x inférieures à la plus élevée, & par conséquent aussi tous les termes sans x.

Par exemple, si dans $\frac{3x+a}{5x+b}$, on suppose x infini à

plus en plus de l'unité, & on conçoit que jamais ils ne peuvent passer cette limite. Chaque terme peut être représenté par $\frac{x}{x+1}$, en mettant pour x le numéro de ce terme. Puis donc que les termes approchent sans cesse de l'unité, & d'autant plus qu'ils s'éloignent plus de l'origine, ils n'atteindront donc cette limite qu'à une distance infinie de l'origine; donc pour avoir le dernier terme de cette série, il faut supposer dans $\frac{x}{x+1}$, que x est infini; or conformément au principe, cette quantité se réduit alors à $\frac{x}{x}$, c'est-à-dire à 1; donc l'omission du terme $+1$ dans $\frac{x}{x+1}$, loin d'altérer la conclusion, est au contraire ce qui la donne telle qu'elle doit être. En un mot, en faisant cette omission, on agit conséquemment à la supposition qu'on a faite.

Telle est la subordination qu'on doit mettre dans le calcul, entre les quantités infinies ou infiniment petites de différens ordres. Mais dans l'application de ce principe sur l'omission des quantités, il peut se présenter quelques cas sur lesquels il est bon de prévenir le lecteur.

Supposons qu'on ait les deux quantités....... $xx+ax+b$, & $xx+ax+c$; lorsque x est infini, il est indubitable que chacun se réduit à xx; ensorte que leur différence semble être zéro, dans ce cas, quoique réellement elle soit $c-b$ ou $b-c$. Voici la solution de cette difficulté apparente.

La différence de ces deux quantités est réellement $c - b$ ou $b - c$; mais lorsqu'on cherche cette différence après avoir supposé x infini dans chacune, c'est demander ce que cette différence est par rapport à ces quantités mêmes; or comme elles sont alors infinies chacune, on doit trouver, comme on le trouve en effet, que cette différence est zéro par rapport à elles. Lors donc qu'on demande ce que devient par la supposition de x infini, le résultat de certaines opérations sur plusieurs quantités; c'est dans le résultat même qu'on doit exécuter la règle donnée ci-dessus, & non pas dans chacune des questions séparément prises.

C'est ainsi qu'on trouvera que la somme de $-xx + ax + b$ & $xx + bx + c$, lorsque x est infini, se réduit à $ax + bx$; car en général, elle est $ax + bx + b + c$, qui lorsque x est infini, se réduit à $ax + bx$. Pareillement, si l'on avoit $x - \sqrt{(xx - bb)}$; cette quantité, lorsque x est infini, semble être zéro. Mais comme $\sqrt{(xx - bb)}$, n'est qu'une indication de la racine de $xx - bb$, il faut, pour avoir sa différence avec x, réduire $xx - bb$ en série (*Alg.* 133); alors la quantité $x - \sqrt{(xx - bb)}$ sera $x - x + \frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3}$, &c. ou $\frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3} +$, &c. qui lorsque x est infini par rapport à b, se réduit à $\frac{bb}{2x}$.

ÉLÉMENS
DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

6. LORSQUE l'on confidère une quantité variable comme croiffant par degrés infiniment petits ; fi l'on veut connoître la valeur de ces accroiffemens, ce qui fe préfente de plus naturel, eft de déterminer la valeur de cette quantité pour un inftant quelconque, & la valeur de cette même quantité pour l'inftant immédiatement fuivant : alors la différence de ces deux valeurs eft l'accroiffement ou la diminution que cette quantité reçoit ; c'eft auffi ce qu'on appelle la *différence* ou la *différentielle* de cette quantité.

7. Pour marquer la différentielle d'une quantité variable fimple, comme x ou y, on écrit dx, ou dy; c'eft-à-dire, qu'on fait précéder cette variable, de la lettre d initiale du mot différence. Mais lorfqu'on veut indiquer la différentielle d'une quantité compofée comme x^2 ou $5x^3 + 3x^2$ ou $\sqrt{(x^2 - aa)}$, &c. on renferme cette quantité entre deux parenthèfes que l'on fait précéder de la lettre d; ainfi l'on écrit $d(x^2)$, $d(5x^3 + 3x^2)$, $d(\sqrt{[x^2 - a^2]})$, &c.

Dorénavant nous repréfenterons les quantités

variables, par les dernières lettres t, u, x, y, z de l'Alphabet; & les constantes, ou celles qui conservent toujours la même valeur, nous les représenterons par les premières lettres a, b, c, &c. & lorsque nous en userons autrement, nous en avertirons. Quant à la lettre d elle ne sera employée à d'autre usage qu'à désigner la différentielle de la quantité qu'elle précèdera.

8. Suivant l'idée que nous venons de donner de la différentielle d'une quantité, on voit que pour avoir la différentielle lorsque la quantité ne renferme que des variables au premier degré & non multipliées ni divisées les unes par les autres, il n'y a autre chose à faire qu'à affecter chaque variable de la caractéristique d, en conservant d'ailleurs le signe de chacune.

Par exemple, la différentielle de $x + y - z$ sera $dx + dy - dz$. En effet, pour avoir cette différentielle, il faudroit considérer x comme devenant $x + dx$; y comme devenant $y + dy$; & z comme devenant $z + dz$; alors la quantité proposée, qui est actuellement $x + y - z$, deviendroit $x + dx + y + dy - z - dz$; prenant donc la différence de ces deux états, on aura $x + dx + y + dy - z - dz - x - y + z$; c'est-à-dire, $dx + dy - dz$ pour la différentielle.

Il en seroit de même, si les variables qui entrent dans la quantité proposée, avoient des coëfficiens ou multiplicateurs constans.

Ainsi la différentielle de $5x + 3y$, est $5dx + 3dy$; celle de $ax + by$, est $adx + bdy$; en effet, lorsque x & y deviennent $x + dx$ & $y + dy$, la quantité $ax + by$ devient $a(x + dx) + b(y + dy)$, c'est-à-dire, $ax + adx + by + bdy$; donc la différence des deux états, ou la différentielle, est $adx + bdy$; c'est-à-dire, qu'en général, il faut affecter chaque variable de la caractéristique d.

Si dans la quantité proposée il y avoit un terme tout constant, la différentielle seroit la même que s'il n'y étoit point. C'est à-dire, que la différentielle de ce terme seroit zéro; cela est évident, puisque la différentielle n'étant autre chose que l'accroissement, une quantité constante ne peut avoir de différentielle sans cesser d'être constante.

Ainsi la différentielle de $ax + b$ est simplement adx.

9. Lorsque les quantités variables sont simples, mais multipliées entr'elles, alors il faut suivre cette règle..... *Differenciez successivement par rapport à chaque variable, comme si tout le reste étoit un multiplicateur constant* *.

Par exemple, pour différencier xy, je différencie d'abord comme si x étoit constant, & j'ai xdy; puis je diffé-

* Pour éviter l'équivoque dans la manière d'écrire, il conviendra d'écrire la dernière, la variable qui devra être affectée de la caractéristique d.

rencie la même quantité xy comme si y étoit constant, & j'ai ydx; ensorte que la différentielle totale de xy est $xdy + ydx$.

La raison de cette règle se trouvera en remontant au principe. Pour avoir la différentielle de xy, il faut considérer x comme devenant $x + dx$, c'est-à-dire, augmentant de la quantité infiniment petite dx, & y comme devenant $y + dy$, c'est-à-dire, augmentant de la quantité infiniment petite dy; alors xy devient $(x + dx) \times (y + dy)$, c'est-à-dire, $xy + xdy + ydx + dydx$; donc la différence des deux états, ou la différentielle, est $xy + xdy + ydx + dydx - xy$, ou $xdy + ydx + dydx$; mais pour que le calcul exprime que dy & dx sont des quantités infiniment petites, comme on le suppose, il faut (3) omettre $dydx$ qui (4) est infiniment petit du second ordre, & par conséquent infiniment petit à l'égard de xdy & ydx qui sont infiniment petits du premier; donc enfin la différentielle de xy ou $d(xy)$ est $xdy + ydx$, comme le donne la règle.

On trouvera de même, en suivant la règle, que la différentielle de xyz est $xydz + xzdy + yzdx$, en différenciant d'abord comme si xy étoit constant, puis comme si xz étoit constant, & enfin comme si yz étoit constant. Et on le démontrera comme ci-dessus, en regardant x, y & z comme devenus $x + dx$, $y + dy$, & $z + dz$; auquel cas xyz devient $(x + dx)(y + dy)(z + dz)$ ou $xyz + xydz + xzdy + yzdx + ydxdz + zdydx + xdzdy + dxdydz$; donc la différence des deux etats sera, après avoir réduit & rejetté les infiniment petits du second & du troisième ordre, $xydz + xzdy + yzdx$, ainsi que le donne la règle.

10. Si la quantité proposée est une puissance quelconque d'une quantité variable, alors suivez cette règle; *Multipliez par l'exposant, diminuez cet exposant d'une unité & multipliez par la différentielle de la variable.*

Ainsi pour appliquer la règle à x^2, j'aurai $2xdx$, en multipliant par l'exposant 2, diminuant l'exposant 2 de 1, & multipliant enfin par la différentielle dx de la variable x. On trouvera de même que la différentielle de x^3 est $3x^2dx$; celle de x^4, $4x^3dx$; celle de x^{-1}, $-x^{-2}dx$; celle de x^{-3}, $-3x^{-4}dx$; celle de $x^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$; celle de $x^{\frac{4}{3}}$ est $\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$: &, en général, celle de x^m, est $mx^{m-1}dx$, quel que soit d'ailleurs l'exposant m, positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

Pour trouver la raison de cette règle, remontons encore au principe. Regardons x comme devenant $x+dx$, (dx étant infiniment petit); alors x^m devient $(x+dx)^m$; c'est-à-dire, en appliquant les règles données (*Alg.* 126), devient $x^m + mx^{m-1}dx + m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2}dx^2 +$ &c. ou (parce que le terme $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot x^{m-2}dx^2$ est infiniment petit du second ordre, & que les suivans seroient encore d'ordres inférieurs), devient $x^m + mx^{m-1}dx$; donc la différence des deux états, ou la différentielle de x^m, est $x^m + mx^{m-1}dx - x^m$, c'est-à-dire, $mx^{m-1}dx$.

S'il y avoit un coëfficient ou multiplicateur constant, cela n'apporteroit aucun changement; il resteroit dans la différentielle tel qu'il est dans la quantité; ainsi $d(ax^m)$ est $max^{m-1}dx$.

11. Voilà tout ce qu'il eſt néceſſaire de ſavoir pour être en état de différencier toutes ſortes de quantités algébriques; ainſi tout ce qui va ſuivre, ne ſera plus qu'une application de ces règles.

12. Si l'on avoit $\frac{x}{y}$, c'eſt-à-dire, une fraction, on écriroit ainſi cette quantité xy^{-1}, ſelon ce qui a été enſeigné (*Alg.* 118); & alors appliquant la règle donnée (9), on auroit $d(xy^{-1}) = xd(y^{-1}) + y^{-1}dx$, & par conſéquent (10) $d(xy^{-1}) = -xy^{-2}dy + y^{-1}dx$.

Si l'on réduit cette quantité, on aura $-\frac{xdy}{y^2} + \frac{dx}{y}$ ou $\frac{ydx - xdy}{y^2}$, où l'on voit que la différentielle d'une fraction $\frac{x}{y}$, eſt égale à la différentielle dx du numérateur, multipliée par le dénominateur y, moins la différentielle dy du dénominateur, multipliée par le numérateur x, le tout diviſé par le quarré du dénominateur; & c'eſt la règle qui l'on donne ordinairement pour différencier les fractions; mais on peut ſe diſpenſer, comme on le voit, de charger encore ſa mémoire de cette nouvelle règle : il ſuffit de faire paſſer le dénominateur au numérateur, ſelon la règle donnée (*Alg.* 118) & de différencier enſuite.

13. Si l'on veut différencier ax^3y^2, on regardera d'abord x^3 & y^2 comme deux variables ſimples, & (9) on aura $d(ax^3y^2) = ax^3d(y^2) + ay^2d(x^3)$; puis (10) on aura $d(ax^3y^2) = 2ax^3ydy + 3ay^2x^2dx$. En général $d(ax^my^n) = ax^md(y^n) + ay^nd(x^m) = nax^my^{n-1}dy + may^nx^{m-1}dx$.

14. Si la quantité qu'on veut différencier, est complexe, mais sans renfermer de puissances de quantités complexes, on différenciera séparément chacun des termes qui la composent; ainsi $d(ax^3 + bx^2 + cxy) = 3ax^2dx + 2bxdx + cxdy + cydx$. De même $d(ax^2 + bx + \frac{cy}{x^2}) = d(ax^2 + bx + cx^{-2}y) = 2axdx + bdx - 2cx^{-3}ydx + cx^{-2}dy$. De même $d(x^3y + ay^2 + b^3) = 3x^2ydx + x^3dy + 2aydy$, en se rappellant que la constante b^3 n'a point de différentielle, ou que sa différentielle est zéro.

15. S'il y a un exposant total, comme dans $(a + bx + cx^2)^5$, on regardera toute la quantité affectée de cet exposant, comme une seule variable que l'on différenciera selon la regle donnée (10) pour les puissances; ainsi $d(a + bx + cx^2)^5 = 5(a + bx + cx^2)^4 \times d(a + bx + cx^2) = 5(a + bx + cx^2)^4 \times (bdx + 2cxdx)$. De même $d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}} d(a + bx^2) = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}} \times 2bxdx = \frac{10}{3}bxdx(a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$.

16. Si la quantité étant toujours complexe, étoit d'ailleurs composée de différens facteurs, on regarderoit chaque facteur comme une variable simple, & l'on suivroit la règle qui a été donnée (9) pour un produit de plusieurs variables simples; ainsi $x^3(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$ qu'on peut regarder comme composé des deux facteurs x^3 & $(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$, donnera $d[x^3(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}] = (a + bx^2)^{\frac{5}{3}} d(x^3) + x^3 d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$ qui, par les règles précédentes, devient...

$3x^2dx$

$3x^2dx(a+bx^2)^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{3}bx^4dx(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}$. Pareillement $d\left(\frac{(x+a)^3}{(x+b)^2}\right) = d[(x+a)^3 \times (x+b)^{-2}]$ $= (x+a)^3 d(x+b)^{-2} + (x+b)^{-2} d(x+a)^3$; c'est-à-dire $= -2(x+a)^3(x+b)^{-3}dx +$ $3(x+b)^{-2}(x+a)^2dx$, qui se change en $-\frac{2(x+a)^3dx}{(x+b)^3} + \frac{3(x+a)^2dx}{(x+b)^2}$, & se réduit à $\frac{(x+3b-2a)(x+a)^2dx}{(x+b)^3}$.

17. Si la quantité proposée est radicale, on substituera aux radicaux, des exposans fractionnaires, comme il a été enseigné (*Alg.* 105), & l'on différenciera ensuite selon les règles ci-dessus. Ainsi $d(\sqrt{x}) =$ $d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$; $d(\sqrt[5]{x^3}) = d(x^{\frac{3}{5}}) =$ $\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}dx$; $d[\sqrt{(aa-xx)}] = d(aa-xx)^{\frac{1}{2}} =$ $\frac{1}{2}(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}d(aa-xx) = -xdx(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$ $= \frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$; $d(x^m\sqrt[q]{[(a+bx^n)^p]}) =$ $d[x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}] = x^m d(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} +$ $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}d(x^m) = \frac{pnb}{q}x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$ $+ mx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

Des Différences secondes, troisièmes, &c.

18. Indépendamment des différentielles que nous venons de considérer, & qu'on appelle *Différences premières*, on considère aussi les différences

secondes, *troisièmes*, &c. Pour marquer celles-ci, on fait précéder la variable, de deux lettres *d*, il s'agit d'une différence seconde; de trois lettres *d*, s'il s'agit d'une différence troisième, & ainsi de suite; par exemple, ddx marque la différence seconde de x.

Lorsqu'il s'agit des différences secondes, on regarde la variable comme augmentant par degrés inégaux, mais dont la différence est infiniment petite à l'égard de ces accroissemens mêmes. Ainsi ddx est infiniment petite à l'égard de dx. De même, dans les différences troisièmes, $dddx$ ou d^3x (car on les marque également de ces deux manières) est infiniment petite à l'égard de ddx; & ainsi de suite.

Pour marquer le quarré de dx, on devroit naturellement écrire, $(dx)^2$; mais pour simplifier on écrit dx^2, ce qui ne peut causer de méprise, & être pris pour la différentielle de x^2, que nous sommes convenus de marquer ainsi $d(x^2)$.

Observons bien que quoique ddx & dx^2 soient tous deux infiniment petits du second ordre, ces deux quantités ne sont pas égales entr'elles; ddx est la différence seconde de x, ou la différence de deux différences consécutives de x; & dx^2 est le quarré de dx.

Pour déterminer les différences secondes, ce qui

se présente naturellement est de considérer la quantité variable, dans trois états consécutifs, infiniment voisins ; prendre la différence du second état au premier, celle du troisième au second ; & enfin prendre la différence de ces deux différences. Par exemple, le premier état de x est x ; au second instant, x augmente de la quantité dx & devient $x + dx$; dans l'instant suivant, $x + dx$ augmente de la quantité $dx + d(dx)$, $d(dx)$ marquant ce dont l'accroissement du second instant surpasse celui du premier, ou la différence de dx. Ainsi les trois états consécutifs de la quantité x sont x, $x + dx$, $x + 2dx + d(dx)$. La différence du second & du premier est dx ; celle du troisième & du second est $dx + d(dx)$; enfin la différence de ces deux différences ou la différence seconde de x, est $d(dx)$; on a donc $ddx = d(dx)$. Donc *pour avoir les différences secondes, il faut différencier les différences premières selon les règles qui ont été données pour avoir celles-ci.*

Par exemple, pour avoir la différence seconde de xy, je prends sa différence première qui est $xdy + ydx$; je différencie maintenant celle-ci, comme si x & dx, y & dy étoient autant de variables différentes, & j'ai $xddy + dydx + dydx + yddx$, ou $xddy + 2dydx + yddx$. Pareillement, la différence seconde

de x^2 se trouvera en différenciant d'abord x^2, ce qui donne $2\,x\,dx$; puis différenciant $2\,x\,dx$ comme si x & dx étoient deux variables finies, ce qui donnera $2\,x\,ddx + 2\,dx^2$. On trouvera de même que.... $dd\,(ax^m) = d\,(max^{m-1}\,dx) = m.(m-1)\,ax^{m-2}\,dx^2 + max^{m-1}\,ddx^*$.

Si* l'on avoit à différencier une quantité dans laquelle il entre déjà des différences premières, soit qu'elle vînt ou ne vînt pas d'une différenciation exacte, on suivroit la même méthode. Ainsi $d\,(xdy) = x\,ddy + dxdy$. Pareillement $d\,(\frac{dy}{x}) = d\,(x^{-1}\,dy) = -\,x^{-2}\,dxdy + x^{-1}\,ddy$. De même $d\,(\frac{dx}{dy}) = d\,(dxdy^{-1}) = ddx\,dy^{-1} - dx\,dy^{-2}\,ddy = \frac{ddx}{dy} - \frac{dxddy}{dy^2}$.

19. Il arrive souvent que dans les calculs où il entre plusieurs variables, on suppose constante la différence première de l'une de ces variables. Cette supposition qui est permise, parce qu'on peut toujours prendre une des différences premières pour

* Il peut se présenter, sur cette manière de prendre les différences secondes, une difficulté qu'il est bon de prévenir. Quand on détermine les différences premières, on rejette les quantités infiniment petites du second ordre; or les différences secondes étant aussi infiniment petites du second ordre, ne doit-on pas craindre que ce qu'on a rejeté dans l'évaluation des premières, ne rende les secondes défectueuses! Non, parce que cet infiniment petit du second ordre, qu'on a rejeté, ne peut donner pour sa différentielle qu'un infiniment petit du troisième ordre, qui doit être rejeté vis-à-vis de la différence seconde, puisque celle-ci est infiniment petite du second.

terme fixe de comparaiſon des différences premières; cette ſuppoſition, dis-je, ſimplifie les calculs, en ce que les termes affectés de la différence ſeconde de cette variable, ne ſe trouvent plus dans le calcul, puiſque ſi dx eſt conſtant, on a $ddx = 0$, ce qui fait diſparoître tous les termes affectés de ddx. Il n'y a d'autre attention à avoir dans ce cas que de ne point différencier dx (ou la différentielle conſtante), dans les termes, où elle ſe rencontre.

Ainſi, la différentielle de $\frac{dx}{dy}$, priſe en ſuppoſant dx conſtant, ou $d\,(dx\,dy^{-1})$, dans cette même ſuppoſition, eſt $-\,dx\,dy^{-2}\,ddy$ ou $-\,\frac{dx\,ddy}{dy^2}$. Si, au contraire, on ſuppoſe dy conſtant, elle eſt $\frac{ddx}{dy}$.

20. A l'égard des différences troiſièmes, on voit, en raiſonnant comme ci-deſſus, que pour les avoir il faut de même différencier, comme à l'ordinaire, les différences ſecondes, en regardant les variables, leurs différences premières & leurs différences ſecondes, comme autant de variables différentes, & ainſi des autres différences plus élevées.

Il faut ſeulement obſerver que ſi dans le paſſage des premières différences aux ſecondes, l'une des différences premières a été ſuppoſée conſtante, on

doit la regarder comme constante dans toutes les autres différenciations.

Remarque.

21. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que les variables x, y, &c. augmentoient toutes en même temps ; c'est-à dire, que x devenant $x + dx$, y devenoit $y + dy$, & ainsi des autres. Mais il peut arriver que les unes diminuent pendant que les autres augmentent. Dans ce cas il faut, après la différenciation, donner dans le résultat, le signe $-$, à la différentielle de la variable qui va en diminuant. Ou bien, on peut laisser la différentielle telle que la donnent les règles précédentes ; mais dans l'application qu'on en fera à une question, il faudra avoir soin de prendre négativement la quantité que représente la différentielle de la variable qui va en diminuant.

En effet si y vient à diminuer d'une quantité q, & que par la différenciation vous ayez supposé tacitement que y devenoit $y + dy$, il faut donc que $y - q = y + dy$, ou que $- q = dy$, ou que $q = - dy$; ainsi dans ces cas, ce que vous auriez appellé dy, vous l'appellerez $- dy$ par-tout ailleurs que dans la différenciation ; nous verrons des exemples de cela, par la suite.

Il en sera de même des différences secondes à l'égard des différences premières. Si la différence première va en

diminuant, vous n'en différencierez pas moins comme à l'ordinaire, mais dans l'application à quelque question, vous appellerez — ddy, ce que vous auriez appellé ddy, si dy est la différence dont il s'agit.

Telles sont les règles pour différencier les quantités, lorsqu'elles sont présentées immédiatement. Mais il arrive souvent que ce n'est pas tant sur les quantités mêmes que sur certaines expressions de ces quantités, que l'on a à opérer. Par exemple, au lieu des angles on emploie souvent leurs sinus, tangentes, &c. de même, on est souvent forcé d'employer les logarithmes des quantités, au lieu des quantités mêmes. Voyons donc comment on doit différencier ces sortes d'expressions.

Des différentielles de Sinus, Cosinus, &c.

22. Lorsqu'on a à différencier une quantité telle que sin. z (ou sinus de l'angle ou de l'arc z), il faut concevoir que l'angle z devient $z + dz$; & alors sin. $(z + dz)$ — sin. z est la différentielle de sin. z. Or selon ce qui a été dit (*Géom.* 286), sin. $(z + dz) =$ sin. z cos. dz + sin. dz cos. z, en supposant le rayon $= 1$. Mais le sinus d'un arc infiniment petit dz est cet arc lui-même, & son cosinus ne diffère point du rayon; on a donc sin. $dz = dz$, & cos. $dz = 1$; donc sin. $(z + dz)$ $=$ sin. $z + dz$ cos. z; donc sin. $(z + dz)$ —

fin. z, ou $d\,(\text{fin.}\,z) = dz\,\text{cof.}\,z$; c'eſt-à-dire, qu'*on a la différentielle du ſinus d'un angle ou d'un arc dont le rayon eſt l'unité, en multipliant la différentielle de l'angle par le coſinus de ce même angle.*

23. Pareillement, la différentielle de cof. z ou cof. $(z + dz)$ — cof. z = cof. z cof. dz — fin. z fin. dz — cof. z, puiſque (*Géom.* 287) cof. $(z + dz)$ = cof. z cof dz — fin. z fin. dz ; donc, eu égard à ce que fin. $dz = dz$, & cof. $dz = 1$, on a $d\,(\text{cof.}\,z)$ = cof. z — dz fin. z — cof. z = — dz fin. z ; c'eſt-à-dire, qu'*on a la différentielle du coſinus d'un angle dont le rayon eſt 1, en multipliant la différentielle de l'angle (priſe avec un ſigne contraire) par le ſinus de ce même angle.*

Ainſi, pour récapituler, on a $d\,(\text{fin.}\,z) = dz$ cof. z, & $d\,(\text{cof.}\,z) = -\,dz$ fin. z.

A l'aide de ces deux principes, on peut différencier toute quantité compoſée de ſinus & de coſinus, & cela en appliquant les règles données précédemment.

Ainſi, pour différencier cof. $3z$, on aura $d\,(\text{cof.}\,3z) = -\,3dz$ fin. $3z$. De même $d\,(\text{cof.}\,mz)$ (m étant un nombre conſtant) $= -\,mdz$ fin. mz ; & $d\,(\text{fin.}\,mz) = mdz$ cof. mz. Pareillement d (fin. z cof. t) = cof. t d (fin. z) + fin. z d (cof. t) = dz cof. t cof. z — dt fin. z fin. t. De même $d\,(\text{fin.}\,z)^m = m\,(\text{fin.}\,z)^{m-1}\,d\,(\text{fin.}\,z) = mdz$ cof. $z\,(\text{fin.}\,z)^{m-1}$.

24. Si l'on avoit $\frac{\text{fin. } z}{\text{cof. } z}$ qui eſt l'expreſſion de la tangente de l'angle z lorſque le rayon eſt 1, (puiſque (*Géom.* 282) on a coſ. z : 1 : : ſin. z : tang. z), on auroit $d\left(\frac{\text{fin. } z}{\text{cof. } z}\right) = d\,[(\text{fin. } z)\,(\text{cof. } z)^{-1}] = dz \text{ cof. } z\,(\text{cof. } z)^{-1} + dz\,(\text{fin. } z)^2\,(\text{cof. } z)^{-2} = \frac{dz \text{ cof. } z}{\text{cof. } z} + \frac{dz\,(\text{fin. } z)^2}{(\text{cof. } z)^2} = \frac{dz\,(\text{cof. } z)^2 + dz\,(\text{fin. } z)^2}{(\text{cof. } z)^2} = \frac{dz}{\text{cof. } z^2}$, parce que (*Géom.* 283) $(\text{cof. } z)^2 + (\text{fin. } z)^2 = 1$.

Donc *la différentielle de la tangente d'un angle dont le rayon eſt* 1, *eſt égale à la différentielle de l'angle, diviſée par le quarré du coſinus de ce même angle.*

D'où l'on peut conclure auſſi que la différentielle d'un angle, eſt égale à la différentielle de la tangente de cet angle, multipliée par le quarré de ſon coſinus ; en effet, puiſque $d\left(\frac{\text{fin. } z}{\text{cof. } z}\right)$ ou $d\,(\text{tang. } z) = \frac{dz}{(\text{cof. } z)^2}$, on a $dz = (\text{cof. } z)^2\, d\,(\text{tang. } z)$.

25. Si l'on avoit au contraire $\frac{\text{cof. } z}{\text{fin. } z}$ qui eſt la cotangente de l'angle z, on auroit $d\left(\frac{\text{cof. } z}{\text{fin. } z}\right) = d\,[(\text{cof. } z)\,(\text{fin. } z)^{-1}] = -dz \text{ fin. } z\,(\text{fin. } z)^{-1} - dz\,(\text{cof. } z)^2\,(\text{fin. } z)^{-2} = -\frac{dz \text{ fin. } z}{\text{fin. } z} - \frac{dz\,(\text{cof. } z)^2}{(\text{fin. } z)^2} = \frac{-dz\,(\text{fin } z^2) - dz\,(\text{cof } z)^2}{(\text{fin. } z)^2} = \frac{-dz}{(\text{fin } z)^2}$; donc *la différentielle de la cotangente d'un angle, eſt égale à la différentielle de l'angle (priſe négativement) diviſée par le quarré du ſinus de ce même angle.* Nous verrons, par la ſuite, l'uſage de ces différenciations.

Des Différentielles logarithmiques.

26. Rappellons-nous (*Arith.* 200) que les logarithmes ſont une ſuite de nombres en progreſſion arithmétique quelconque, qui répondent, terme à terme, à une ſuite de nombres en progreſſion géométrique quelconque.

Cela poſé, ſoient y & y' deux termes conſécutifs d'une progreſſion géométrique, dont r ſoit la raiſon, & a, a', les deux premiers termes. Soient pareillement x & x' deux termes conſécutifs d'une progreſſion arithmétique, dont b & b' ſoient les deux premiers termes. Suppoſons de plus que x & x' ſont à même place dans la progreſſion arithmétique que y & y' dans la progreſſion géométrique; auquel cas x & x' ſont les logarithmes de y & y'.

Par la nature de la progreſſion géométrique, (*Arith.* 195) on a $y' = ry$, & $a' = ra$; ſubſtituant dans la première équation, la valeur de r tirée de la ſeconde, on a $y' = \frac{a'y}{a}$, ou $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$. Suppoſons maintenant que la différence de y' à y eſt z, ou que $y' = y + z$; nous aurons $\frac{y+z}{y}$ ou $1 + \frac{z}{y} = \frac{a'}{a}$, & par conſéquent $\frac{z}{y} = \frac{a'}{a} - 1 = \frac{a'-a}{a}$, ou $\frac{az}{y} = a' - a$.

D'un autre côté, la nature de la progreſſion arithmétique (*Arith.* 188), donne $x' - x = b' - b$.

Pour avoir maintenant la relation de ces deux progreſſions, ſuppoſons que la différence $a' - a$ des deux premiers termes de la première, ſoit à la différence $b' - b$ des deux premiers termes de la ſeconde, comme l'unité eſt à un nombre quelconque m, c'eſt-à-dire, que $a' - a : b' - b :: 1 : m$; nous aurons $m(a' - a) = b' - b$; mettant donc dans cette dernière équation, pour $a' - a$ & $b' - b$, les valeurs qu'on vient de trouver, on aura $\frac{maz}{y} = x' - x$, qui exprime généralement la relation d'une progreſſion géométrique quelconque, à la progreſſion arithmétique quelconque correſpondante.

Imaginons maintenant, que dans l'une & dans l'autre progreſſion, les termes conſécutifs ſoient infiniment voiſins; alors z qui marque la différence de y' à y, ſera dy, & $x' - x$ qui marque la différence de x' à x, ſera dx; d'où l'équation ſe changera en $\frac{mady}{y} = dx$. A l'égard de m qui marque le rapport de la différence des deux premiers termes de la progreſſion arithmétique, à la différence des deux premiers termes de la progreſſion géométrique, il n'en ſera pas moins un

nombre fini, quoique ces deux différences ſoient alors infiniment petites, parce que l'on conçoit aiſément que deux quantités infiniment petites peuvent ſe contenir l'une l'autre, autant de fois que deux quantités finies.

L'équation $\frac{mady}{y} = dx$ nous apprend donc que la différentielle dx du logarithme d'un nombre marqué par y, eſt égale à la différentielle dy de ce nombre, diviſée par ce même nombre y, & multipliée par le premier terme a de la progreſſion géométrique fondamentale, & par le nombre m qui marque le rapport de la différence des deux premiers termes de la progreſſion arithmétique, à la différence des deux premiers termes de la progreſſion géométrique. Comme ce nombre m fixe, en quelque ſorte, le rapport des deux progreſſions, on l'appelle le *module*.

On voit donc que ſelon la valeur que l'on ſuppoſera à m & au premier terme a de la progreſſion géométrique, un même nombre y peut avoir différens logarithmes. Mais entre tous ces différens ſyſtêmes de logarithmes, celui qui eſt le plus commode dans les calculs algébriques, eſt celui où le premier terme de la progreſſion géométrique eſt 1, & où le module eſt 1. Alors l'équation $\frac{mady}{y} =$

dx qui renferme tous les différens systêmes de logarithmes, devient $\frac{dy}{y} = dx$.

27. Donc, dans le système de logarithmes en usage dans le calcul algébrique, *la différentielle* d x *du logarithme* x *d'un nombre quelconque* y, *est égale à la différentielle* d y *de ce nombre, divisée par ce même nombre* y. C'est-là le principe d'après lequel on peut trouver facilement la différentielle du logarithme de toute quantité algébrique ; mais avant d'en faire usage, nous observerons 1°. que les logarithmes dont il s'agit ici, ne sont point ceux des tables ; mais on peut facilement passer des uns aux autres, comme nous le verrons par la suite.

2°. Que puisque le premier terme b de la progression arithmétique, ne se trouve point dans l'équation $\frac{madу}{y} = dx$; cette équation, ainsi que l'équation particulière $\frac{dy}{y} = dx$ que nous venons d'en déduire, ont toujours lieu quel que soit ce premier terme b, c'est-à-dire, le logarithme du premier terme a de la progression géométrique. Donc nous sommes les maîtres de supposer pour plus de simplicité, que le logarithme du premier terme de la progression arithmétique est zéro ; & comme nous avons supposé que la progression géométrique à laquelle nous nous arrêtons, a pour

premier terme l'unité, nous prendrons donc zéro pour logarithme de l'unité ; mais il faut bien remarquer qu'on en est absolument maître.

En prenant ainsi l'unité pour premier terme de la progression géométrique, & zéro pour premier terme de la progression arithmétique, ou pour le logarithme de l'unité, les règles que nous avons données (*Arith.* 207 & *suiv.*) pour l'usage des logarithmes, s'appliqueront également ici ; ainsi, en se les rappellant & les généralisant, on verra que au lieu de $l\,(ab)$ on peut prendre $la + lb$, l marquant *logarithme*. De même $l\,\frac{a}{b} = la - lb$. Pareillement $la^m = m\,la$; enfin $l\sqrt[n]{a^m} = la^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\,la$.

Cela posé, appliquant le principe que nous venons d'établir concernant la différentielle du logarithme d'un nombre, on trouvera que $dlx = \frac{dx}{x}$; $dl\,(a+x) = \frac{d\,(a+x)}{a+x} = \frac{dx}{a+x}$; $dl\left(\frac{a}{a+x}\right) = d\,[la - l(a+x)] = -\frac{d(a+x)}{a+x} = -\frac{dx}{a+x}$, en faisant attention que la différentielle de la constante la, est zéro.

Pareillement, $dl\,\frac{1}{x} = d\,(l1 - lx) = -\frac{dx}{x}$; $dl\,(x^2) = d\,(2\,lx) = \frac{2\,dx}{x}$; $dl\,(xy) =$

$d\,(lx + ly) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$; $d\,(l\,\frac{x}{y} =$
$d\,(lx - ly) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$; $dl\left(\frac{a+x}{a-x}\right) =$
$d\,[l(a+x) - l\,(a-x)] = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$,
$d\,[l\,(aa+xx)] = \frac{d\,(aa+xx)}{aa+xx} = \frac{2\,x\,dx}{aa+xx}$;
$dl\surd(aa+xx) = \frac{d\surd(aa+xx)}{\surd(aa+xx)} = \frac{x\,dx}{\surd(aa+xx)\,\surd(aa+xx)} =$
$\frac{x\,dx}{aa+xx}$; ou plus commodément, $dl\,\surd(aa+xx) =$
$d\,[\frac{1}{2}\,l(aa+xx)] = \frac{x\,dx}{aa+xx}$; $dl\,[x^m(a+bx^n)^p] =$
$d\,[lx^m + l(a+bx^n)^p] = d\,[mlx + pl(a+bx^n)] =$
$\frac{m\,dx}{x} + \frac{npbx^{n-1}\,dx}{a+bx^n}$. Ces exemples suffisent pour faire voir comment on doit différencier toutes les autres quantités logarithmiques.

Des Différentielles des quantités exponentielles.

28. On rencontre encore quelquefois des quantités de cette forme, c^x, x_y; c'est-à-dire, des quantités dont l'exposant est variable. On les appelle des quantités *Exponentielles*.

Pour savoir comment on doit les différencier, posons $x^y = z$; alors, en prenant les logarithmes de chaque membre, nous aurons $l\,x^y = l\,z$, & par conséquent $dl\,(x^y) = \frac{dz}{z}$; donc $dz = z\,dl\,(x_y)$, ou (en mettant pour z & dz, leurs valeurs) $d\,(x_y) = x^y\,dl\,(x^y)$; c'est-à dire, que *la différentielle d'une quantite exponentielle se trouve en multipliant cette quantité exponentielle, par la différentielle de son logarithme.*

Ainsi $d(x^y) = x^y d(lx^y) = x^y d(ylx) = x^y (dylx + \frac{ydx}{x})$. Pareillement $d(a^x + y^z) = d(a^x) + d(y^z) = a^x d(la^x) + y^z d(ly^z) = a^x d(xla) + y^z d(zly) = a^x dxla + y^z (dzly + \frac{zdy}{y})$. De même $d(aa + xx)^x = (aa + xx)^x dl (aa + xx)^x = (aa + xx)^x d[xl(aa + xx)] = (aa + xx)^x [dxl(aa + xx) + \frac{2x^2dx}{aa + xx}]$; & ainsi des autres. On fait assez souvent usage, dans le calcul, de la quantité exponentielle c^x, c étant le nombre dont le logarithme $= 1$. La différentielle de cette quantité, est, selon ce qui vient d'être enseigné, $c^x d(lc^x)$, ce qui revient à $c^x d(xlc) = c^x . dxlc$; donc puisque lc est supposé $= 1$, on a simplement $d(c^x) = dxc^x$. C'est-à-dire, que cette exponentielle particulière a pour différentielle cette exponentielle même, multipliée par la différentielle de son exposant. Nous la retrouverons par la suite.

Applications des Régles précédentes.

29. Pour faire connoître, par quelques exemples, l'usage des règles que nous venons de donner, & leur avantage sur l'Algèbre ordinaire, nous allons les appliquer aux objets que nous connoissons; c'est-à-dire, à des questions de Géométrie & de Calcul.

Application

Application aux Soutangentes, Tangentes, Sounormales, &c. des Lignes courbes.

30. Pour mener une tangente à une ligne courbe quelconque *AM* (*fig.* 1), on se représente cette ligne courbe, comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits; le prolongement *MT* de l'un *Mm* de ces côtés, est la tangente que l'on détermine pour chaque point *M*, en calculant la valeur de la soutangente *PT*, ou de la partie de la ligne sur laquelle se comptent les abscisses, comprise entre l'ordonnée *PM* & la rencontre *T* de cette tangente. Voici comment on détermine cette soutangente.

Par les deux extrémités *M* & *m* du côté infiniment petit *Mm*, on imagine les deux ordonnées *MP*, *mp*; & par le point *M*, la ligne *Mr* parallèle à *AP* axe des abscisses. Le triangle infiniment petit *Mrm* est alors semblable au triangle fini *TPM*, & donne cette proportion $rm : rM :: PM : PT$. Or si l'on nomme *AP*, x; *PM*, y; il est évident que *Pp* ou son égal *rM* sera dx, & que *rm* sera dy; on aura donc $dy : dx :: y : PT = \frac{y\,dx}{dy}$. C'est-là la formule générale pour déterminer la soutangente de quelque courbe que ce soit, soit que les y & les x soient

perpendiculaires entr'elles, ſoit qu'elles ne le ſoient pas, pourvu que les y ſoient toujours parallèles entr'elles. Voyons maintenant comment on applique cette formule à chaque courbe dont on a l'équation.

Suppoſons que la nature de la courbe quelconque AM, ſoit exprimée par une équation telle qu'on voudra, où entrent x, y & des quantités conſtantes. Si l'on différencie cette équation, il n'y aura jamais que deux ſortes de termes, les uns multipliés par dx, les autres multipliés par dy. Il ſera donc facile, par les règles ordinaires de l'Algèbre, de tirer de cette équation différentielle, la valeur de $\frac{dx}{dy}$, laquelle ne contiendra que des x, des y, & des conſtantes. Subſtituant cette valeur dans la formule $\frac{y\,dx}{dy}$ ou $y \times \frac{dx}{dy}$, on aura la valeur de la ſoutangente, en x, y & en conſtantes; enfin mettant pour y ſa valeur exprimée en x, que l'on tirera de l'équation de la courbe même, on aura la ſoutangente exprimée ſimplement en x & en conſtantes; ainſi pour déterminer la ſoutangente pour quelque point M que ce ſoit, il ne s'agira plus que de mettre dans ce dernier réſultat, au lieu de x, la valeur de l'abſciſſe AP qui répond à ce point M.

Suppoſons, par exemple, que la courbe dont il s'agit, eſt une ellipſe dont l'équation (*Alg.* 230) eſt

$yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$. Je différencie cette équation, ce qui me donne $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$ ou $2aaydy = abbdx - 2bbxdx$; j'en tire la valeur de $\frac{dx}{dy}$, en divisant d'abord par dy, puis par le multiplicateur de dx, & j'ai $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{abb - 2bbx}$; substituant dans $\frac{ydx}{dy}$, j'aurai $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aay^2}{abb - 2bbx}$; enfin mettant pour y^2, sa valeur $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$ que donne l'équation de la courbe, & réduisant, j'ai $\frac{ydx}{dy}$ ou $PT = \frac{2(ax - xx)}{a - 2x} = \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$, valeur qui est précisément la même que celle que nous avons trouvée (*Alg.* 237), mais que l'on trouve ici d'une manière bien plus expéditive. Remarquons en passant, combien ce résultat justifie ce que nous avons dit (5) touchant les quantités que l'on rejete dans le calcul; car en employant ici le calcul différentiel, dont les règles, dans cet exemple, supposent l'omission des quantités infiniment petites du second ordre, vis-à-vis de celles du premier, nous arrivons au même résultat que dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, où nous avions déterminé cette soutangente de la manière la plus directe & la plus rigoureuse. On voit donc qu'en rejetant ainsi les quantités que nous avons prescrit de rejeter, on ne fait qu'imprimer au calcul le caractère qu'il doit avoir pour exprimer l'état de la question.

On s'y prendra d'une manière semblable pour

déterminer les tangentes, les sounormales, les normales, &c.

Supposons, pour plus de simplicité, que les x & les y sont perpendiculaires entre elles ; pour avoir la tangente, on comparera de nouveau le triangle Mmr, au triangle TPM, & l'on aura $rm : Mm :: PM : TM$; or à cause du triangle-rectangle Mrm, on a $Mm = \sqrt{[(rM)^2 + (rm)^2]} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} :: y : TM$; donc $TM = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(dy^2)}} = y\sqrt{\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}\right)} = y\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$; ainsi, différenciant l'équation de la courbe, on en tirera la valeur de $\frac{dx}{dy}$, dont on substituera le quarré dans cette expression de la tangente; après quoi, mettant pour y sa valeur en x & en constantes, tirée de l'équation de la courbe, on aura la tangente exprimée en x & en constantes. On peut en faire l'application à l'équation à l'ellipse ; on retrouvera la même valeur que nous avons donnée (*Alg.* 240).

Si l'on veut avoir la sounormale, on imaginera la ligne MQ perpendiculaire à la tangente TM, & l'on remarquera que les triangles Mrm, MPQ, qui ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre,

sont semblables; on aura donc $Mr : rm :: PM : PQ$; c'est-à-dire, $dx : dy :: y : PQ = \frac{y\,dy}{dx}$. Donc, après avoir différencié l'équation de la courbe, on en tirera la valeur de $\frac{dy}{dx}$, que l'on substituera dans $\frac{y\,dy}{dx}$, & achevant comme ci-dessus, on aura la valeur de la sounormale, en x & en constantes.

Par exemple, pour l'ellipse, l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ étant différenciée, nous donne $2y\,dy = \frac{bb}{aa}(a\,dx - 2x\,dx)$; donc $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{bb}{aa}(a - 2x)}{2y}$; par conséquent la sounormale $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{bb}{aa} \times \frac{a - 2x}{2} = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a - x)$, la même chose que l'on a trouvée (*Alg* 236).

Si l'on vouloit la normale MQ, on la trouveroit en comparant de nouveau le triangle Mrm, au triangle MPQ.

Prenons pour second exemple de la formule des soutangentes, & de celle des sounormales, l'équation à la parabole, qui (*Alg.* 294) est $yy = px$. En différenciant, nous aurons $2y\,dy = p\,dx$; donc $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$; donc la soutangente $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$; & la sounormale $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{py}{2y} = \frac{p}{2}$; ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons trouvé (*Alg.* 298 & 299).

Pour troisième exemple, nous prendrons l'équation $y^{m+n} = a^m x^n$ qui exprime généralement les paraboles de tous les genres.

On est convenu d'appeller *parabole*, toute courbe dont l'équation telle que $y^{m+n} = a^m x^n$ n'a que deux termes, mais où les exposans de x & y dans différens membres, sont de même signe.

En différenciant cette équation, nous aurons............ $(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy = n a^m x^{n-1}\, dx$; donc $\frac{dx}{dy} = \frac{(m+n)\, y^{m+n-1}}{n a^m x^{n-1}}$; donc la soutangente $\frac{y\,dx}{dy}$ sera $\frac{(m+n)\,.\,y^{m+n}}{n a^m x^{n-1}}$, ou (en mettant pour y^{m+n} sa valeur $a^m x^n$), $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{(m+n)\, a^m x^n}{n a^m x^{n-1}} = \frac{m+n}{n} x$; d'où l'on voit que la soutangente, dans ces courbes, est égale à autant de fois l'abscisse x, qu'il y a d'unités dans l'exposant de y divisé par l'exposant de x, ce qui a lieu, comme nous le savions déjà, dans la parabole ordinaire, où la soutangente est $2x$, & où l'exposant de y divisé par l'exposant de x est en effet $\frac{2}{1} = 2$.

Prenons maintenant, pour exemple, une courbe dont la nature soit exprimée par une équation entre les différentielles des coordonnées. Supposons, par exemple, que la courbe *BM* (*fig.* 2) soit telle, que les abscisses *AP*, *Ap*, &c. étant prises en progression arithmétique, les ordonnées correspondantes *PM*, *pm*, &c. soient en progression géométrique; cette courbe qu'on appelle *logarithmique*, parce que les ordonnées représentant successivement tous les nombres imaginables, les abscisses représentent leurs logarithmes; cette courbe,

dis-je, aura pour équation $\frac{am\,dy}{y} = dx$, puisque nous avons vu (26) que cette équation exprimoit la relation des nombres à leurs logarithmes. On aura donc $\frac{dx}{dy} = \frac{am}{y}$, & par conséquent la soutangente $\frac{y\,dx}{dy}$ deviendra $\frac{amy}{y}$ ou am; c'est-à-dire, que pour chaque point d'une même logarithmique, la soutangente PT est toujours la même, & égale à autant de fois la première ordonnée AB ou a, qu'il y a d'unités dans le module m.

31. Lorsque l'équation de la courbe est telle que x croissant, y diminue, comme dans la *figure 3*; alors la ligne rM doit être exprimée par $-dy$ (21); & la proportion $rM : rm :: PM : PT$ qui sert à trouver la soutangente, devient $-dy : dx :: y : PT = -\frac{y\,dx}{dy}$; ainsi il n'y aura aucune différence pour le calcul; le seul changement est que la tangente au lieu de tomber du côté de l'origine A des abscisses, par rapport à l'ordonnée PM, tombera du côté opposé; c'est pourquoi on peut toujours prendre $\frac{y\,dx}{dy}$ pour la formule des soutangentes; si les ordonnées vont en décroissant, la valeur de $\frac{y\,dx}{dy}$ se présentera sous une forme négative qui indiquera qu'il faut porter cette valeur du côté opposé à l'origine des x.

Par exemple, si on prend l'équation au cercle, l'origine étant prise au centre, c'est-à-dire (*Alg.* 221) l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$; il est évident que CP ou x (*fig.* 4) croissant, y ou PM diminue; aussi la soutangente PT tombe-t-elle du côté de PM opposé à l'origine C des abscisses; & c'est ce que le calcul dit aussi; car si l'on différencie, on a $2ydy = -2xdx$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$; donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{-y^2}{x} = \frac{-(\frac{1}{4}aa - xx)}{x}$, valeur dont le signe $-$ indique qu'elle doit être portée du côté opposé à celui que l'on a supposé en prenant $\frac{ydx}{dy}$ pour formule de la soutangente.

Prenons encore pour exemple, l'équation $xy = aa$ qui est à l'hyperbole entre ses asymptotes (*Alg.* 282); nous aurons $xdy + ydx = 0$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y}$; donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{-xy}{y} = -x$; ce qui nous apprend que pour mener une tangente à l'hyperbole considérée entre ses asymptotes, il faut prendre sur l'asymptote voisine du point M en question (*fig.* 5) & du côté de PM opposé au point A origine des x, la ligne $PT = AP = x$.

On voit avec quelle facilité toutes ces choses se déterminent par le calcul différentiel.

A l'imitation des paraboles de tous les genres, on appelle *hyperboles*, rapportées à leurs asymptotes, toutes les courbes dont l'équation telle que $y^m = a^{m+n} x^{-n}$ n'a que deux termes, mais où les exposans de y & de x dans différens membres, sont de signes contraires. On peut encore prendre ces courbes pour exemple; nous le laissons à faire au lecteur.

On trouvera que la soutangente est $-\frac{m}{n}x$; c'est-à-dire, qu'elle tombe du côté opposé à l'origine des x, & qu'elle est égale à autant de fois l'abscisse qu'il y a d'unités dans l'exposant de y divisé par l'exposant de x.

32. Remarquons encore que $\frac{dx}{dy}$ exprime la tangente de l'angle que la courbe fait en chaque point, avec l'ordonnée; & $\frac{dy}{dx}$ exprime celle de l'angle que la courbe fait avec l'axe des abscisses. En effet, dans le triangle-rectangle Mmr (*fig.* 1), on a (en supposant le rayon des tables $= 1$) $rm : rM :: 1 :$ tang. rmM; donc tang. $rmM = \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$. Donc si l'on veut savoir en quel endroit une courbe, ou sa tangente, fait avec l'ordonnée, un angle donné, ou dont la tangente est connue, ayant représenté cette tangente par m, on aura $m = \frac{dx}{dy}$; ainsi déterminant, par différenciation de l'équation de la courbe, la valeur de $\frac{dx}{dy}$, & l'égalant à m, on aura une equation dans laquelle substituant pour y sa valeur en x & constantes, tirée de l'équation de la courbe, on aura la valeur ou les valeurs de x, qui répondent aux points où la courbe fait un pareil angle avec l'ordonnée; & si la courbe ne fait nulle part avec l'ordonnée un

angle égal à l'angle donné, on trouvera que la valeur ou les valeurs de x seront imaginaires, ou bien l'équation indiquera une absurdité manifeste.

Par exemple, dans l'hyperbole qui auroit pour équation $yy = 2(ax + xx)$, on trouvera $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2a+4x}$, lequel étant égalé à m, donne $\frac{2y}{2a+4x} = \frac{y}{a+2x} = m$; d'où l'on tire $y = ma + 2mx$; mais l'équation de la courbe donne $y = \sqrt{[2(ax + xx)]}$; donc $ma + 2mx = \sqrt{[2(ax + xx)]}$ ou, en quarrant, $mmaa + 4mmax + 4mmxx = 2ax + 2xx$. Si l'on demande maintenant, en quel endroit cet hyperbole fait, avec l'ordonnée, un angle de 45 degrés; comme la tangente de 45 degrés est égale au rayon, on aura $m = 1$, ce qui réduit l'équation à $aa + 4ax + 4xx = 2ax + 2xx$ ou $2xx + 2ax + aa = 0$; qui étant résolue donne $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}aa)} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}aa)}$, valeurs imaginaires, & qui font voir que l'hyperbole dont l'équation particulière est $yy = 2(ax + xx)$, ne fait nulle part, avec l'ordonnée, un angle de 45 degrés.

Application aux limites des Lignes courbes, & en général, aux limites des quantités, & aux questions de maximis *&* minimis.

33. Nous avons vu (32) que $\frac{dx}{dy}$ exprimoit la tangente de l'angle que la courbe ou sa tangente, fait, en chaque point, avec l'ordonnée; & que

$\frac{dy}{dx}$ exprimoit celle de l'angle que la courbe ou ſa tangente fait avec l'axe des abſciſſes.

Donc, pour ſavoir en quel endroit la tangente d'une courbe devient parallèle aux ordonnées, il faut chercher en quel endroit la valeur de $\frac{dx}{dy}$ devient zéro, ou, ce qui revient au même, en quel endroit dx devient zéro; & pour ſavoir en quel endroit la tangente de la courbe eſt parallèle aux abſciſſes, il faut chercher en quel endroit $\frac{dy}{dx}$ devient zéro, ou, ce qui revient au même, en quel endroit dy eſt zéro. Car il eſt évident que dans le premier cas, l'angle de la courbe, avec les ordonnées eſt nul; & dans le ſecond cas, l'angle de la courbe, avec les abſciſſes, eſt nul.

Il ſuit évidemment de-là, que ſi l'on veut ſavoir ſi une courbe dont on a l'équation, a, dans quelqu'endroit, ſa tangente parallèle aux ordonnées ou aux abſciſſes, il faut différencier cette équation, & en ayant tiré la valeur de $\frac{dx}{dy}$, ſi l'on égale le numérateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$, à zéro, on aura une équation qui, conjointement avec l'équation même de la courbe, donnera la valeur de x & celle de y qui déterminent en quel endroit la tangente eſt parallèle aux ordonnées; enſorte que ſi cela arrive en

plusieurs endroits, on aura plusieurs valeurs pour x & plusieurs valeurs pour y.

Au contraire, si l'on égale le dénominateur à zéro, cette équation, conjointement avec celle de la courbe, déterminera les valeurs de x & de y, qui répondent aux endroits où la tangente de la courbe, devient parallèle aux abscisses.

Pour éclaircir ceci par un exemple familier, prenons la courbe qui a pour équation $yy + xx = 3ax - 2aa + 2by - bb$, qui en supposant les x & les y perpendiculaires entr'elles, appartient au cercle; l'origine des x & des y étant prise sur un point A hors de ce cercle.

Les lignes AP (*fig.* 6) sont x, & les lignes PM, PM' sont les deux valeurs de y que la résolution de cette équation donne pour chaque valeur de x.

Si l'on différencie cette équation, on aura $2ydy + 2xdx = 3adx + 2bdy$, d'où l'on tire $\frac{dx}{dy} = \frac{2y - 2b}{3a - 2x}$.

Egalons d'abord le numérateur à zéro, pour avoir les endroits où la tangente devient parallèle aux ordonnées. Nous aurons $2y - 2b = 0$, ou $y = b$. Substituant cette valeur dans l'équation de la courbe, il vient $bb + xx = 3ax - 2aa + 2bb - bb$, ou $xx - 3ax = -2aa$, qui étant résolue donne $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa)}$; c'est-à-dire, $x = 2a$, & $x = a$; ce qui nous apprend que la courbe, ou sa tangente, devient parallèle aux ordonnées, en deux points R & R', qui ont chacun pour ordonnée la ligne b, & dont l'un R a pour abscisse la ligne $AQ = a$, & l'autre R' a pour abscisse la ligne $AQ' = 2a$.

Egalons maintenant à zéro, le dénominateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$, pour savoir en quel endroit la courbe, ou sa tangente, devient parallèle aux abscisses; nous aurons $3a - 2x = 0$, ou $x = \frac{3}{2}a$. Substituant cette valeur dans l'équation de la courbe, nous aurons $yy + \frac{9}{4}aa = \frac{9}{2}aa - 2aa + 2by - bb$, ou $yy - 2by + bb = \frac{1}{4}aa$; & tirant la racine quarrée, $y - b = \pm \frac{1}{2}a$; donc $y = b \pm \frac{1}{2}a$, c'est-à-dire, $y = b + \frac{1}{2}a$, & $y = b - \frac{1}{2}a$; ce qui nous apprend que la tangente devient parallèle aux abscisses, en deux endroits ou points T & T' qui ont pour abscisse commune la ligne $AS = \frac{3}{2}a$, & dont l'un T' a pour ordonnée $ST' = b + \frac{1}{2}a$, & l'autre T a pour ordonnée la ligne $ST = b - \frac{1}{2}a$.

Les points Q & Q' sont ce qu'on appelle les *limites* des abscisses, parce qu'entre Q & Q', à chaque abscisse AP répondent des valeurs réelles PM & PM' pour y; au lieu qu'entre Q & A, & au-delà de Q' par rapport à A, il n'y a aucun point de la courbe; ensorte que si on suppose x plus petit que AQ ou a, ou bien plus grand que AQ' ou $2a$, on ne trouve aucune valeur réelle pour y. En effet, si dans l'équation on met au lieu de x une quantité $a - q$, plus petite que a, ou une quantité plus grande que $2a$, ou telle que $2a + q$, on trouvera en résolvant l'équation, que les deux valeurs de y sont imaginaires.

Pareillement, si par le point A on conçoit AL parallèle aux ordonnées, c'est-à-dire, l'axe des ordonnées; & que par les points T & T', on mène les lignes TL, $T'L'$ parallèles aux abscisses; les lignes $AL = ST = b - \frac{1}{2}a$, & $AL' = ST' = b + \frac{1}{2}a$, sont les limites des ordon-

nées ; car il est évident qu'il ne peut y avoir d'ordonnée plus grande que AL' ni plus petite que AL, la tangente devant être parallèle aux abscisses. Aussi, si l'on met dans l'équation de la courbe, au lieu de y une quantité plus petite que $b - \frac{1}{2}a$, qu'on mette, par exemple, $b - \frac{1}{2}a - q$, on verra, en résolvant l'équation, que les valeurs de x sont imaginaires. La même chose arrivera si on met au lieu de y, la quantité $b + \frac{1}{2}a + q$, plus grande que $b + \frac{1}{2}a$.

34. L'ordonnée ST' est la plus grande de toutes celles qui aboutissent à la partie concave $RT'R'$ de la circonférence. L'ordonnée ST est la plus petite de toutes celles qui aboutissent à la partie convexe ; & les ordonnées QR & $Q'R'$ sont, tout-à-la-fois les plus petites qui aboutissent à la partie concave, & les plus grandes qui aboutissent à la partie convexe.

35. Ainsi, la même méthode sert en même temps, 1° à déterminer les limites des abscisses & des ordonnées ; 2° à déterminer dans quels cas la tangente devient parallèle aux abscisses, ou aux ordonnées ; 3° enfin, à déterminer les plus grandes & les plus petites abscisses ou ordonnées.

36. Or, de quelque manière qu'une quantité soit exprimée algébriquement, on peut toujours regarder l'expression algébrique qui la représente, comme étant celle de l'ordonnée d'une ligne courbe.

Par exemple, si $\frac{x^2 \times (a - x)}{aa}$ est l'expression d'une quantité que j'appelle y, auquel cas j'ai $y = \frac{x^2 (a - x)}{aa}$, je puis regarder cette équation, comme étant celle d'une ligne courbe dont x seroit l'abscisse, & y l'ordonnée. Alors si la quantité $\frac{x^2 \times (a - x)}{aa}$ peut, dans un certain cas, devenir plus grande ou plus petite que dans toute autre (ce qu'on appelle être susceptible d'un *maximum* ou d'un *minimum*), il est visible qu'il faut suivre exactemeut la même méthode que ci-dessus; c'est-à-dire, différencier cette équation, & en ayant tiré la valeur de $\frac{dx}{dy}$, égaler à zéro le numérateur & le dénominateur de cette valeur.

37. C'est à cela que se réduit la méthode qu'on appelle de *maximis* & *minimis*, qui est une des plus utiles de l'analyse, & qui a pour objet de faire trouver entre plusieurs quantités qui croissent ou décroissent suivant une même loi, quelle est la plus grande ou la plus petite, ou en général celle qui a certaines propriétés dans le plus haut degré à l'égard de toutes ses semblables. Nous allons en donner quelques exemples.

38. Proposons-nous d'abord de partager un nombre donné a en deux parties, telles que leur produit soit plus grand

qui aboutissent à la partie concave. Pareillement, une quantité peut devenir la plus petite de toutes ses semblables, en deux manières différentes ; lorsque, comme PM elle va d'abord en diminuant pour augmenter ensuite ; ou lorsque, comme $P''M'''$, elle va en diminuant pour s'arrêter brusquement, & alors elle est tout-à-la-fois un *minimum* & un *maximum* ; elle est un *minimum* à l'égard de la branche $M'T'M'''$, & un *maximum* à l'égard de la branche MTM''.

41. Ainsi, lorsque l'on sait qu'une quantité est susceptible d'un *maximum*, ou d'un *minimum*, ou de tous les deux, pour distinguer dans lequel de ces trois cas elle se trouve, il faut, en supposant que a marque la valeur de x, qui convient au *maximum* ou *minimum*, substituer dans la quantité proposée, au lieu de x, successivement $a + q$, a, & $a - q$. Si les deux résultats extrêmes sont réels & plus petits que celui du milieu, la quantité est un *maximum*; si au contraire, les deux résultats extrêmes sont plus grands que celui du milieu, la quantité est un *minimum* ; enfin, si des deux résultats extrêmes l'un est imaginaire & l'autre réel, la quantité est tout-à-la-fois un *maximum* & un *minimum*.

42. Lorsque dans la détermination d'un *ma-*

ximum ou d'un *minimum*, la valeur que l'on trouve pour la variable, rend celle du *maximum* ou du *minimum* négative, on doit conclure que le *maximum* ou le *minimum* qu'elle indique, n'appartient point à la question actuelle, mais qu'il appartient à une question où quelques-unes des conditions seroient contraires.

Par exemple, si l'on demandoit de partager la ligne AB (*fig.* 7) au point C, de manière que le quarré de la distance AC au point A, étant divisée par la distance au point B, donne le plus petit quotient possible; alors nommant a la ligne donnée AB, & x la partie AC; la partie restante CB seroit $a - x$, & par conséquent le quotient seroit $\frac{x^2}{a-x}$; différencions donc cette quantité, ou $x^2 (a-x)^{-1}$; nous aurons $2xdx.(a-x)^{-1} + x^2dx (a-x)^{-2} = 0$, ou $\frac{2xdx}{a-x} + \frac{x^2 dx}{(a-x)^2} = 0$, ou $2axdx - x^2dx = 0$, ou $(2a-x)x = 0$, qui donne ou $x = 0$, ou $2a - x = 0$; la première valeur indique un *minimum*, mais qui est évident sans le calcul. Quant à la seconde qui donne $x = 2a$, si on substitue cette valeur dans $\frac{x^2}{a-x}$, celle-ci devient $\frac{4a^2}{-a}$ ou $-4a$. Le *minimum* n'appartient donc pas à la question actuelle. Mais si l'on fait attention à la valeur $x = 2a$ que l'on trouve, on verra que le point C ne peut être entre A & B; mais que la question aura une solution, s'il s'agit de le trouver sur le prolongement de AB, au-delà de B par rapport à A. Or dans ce cas,

si nous nommons AC, x; la distance BC' ne sera plus $a - x$, mais $x - a$, & la quantité dont il s'agissoit, sera $\frac{x^2}{x-a}$, laquelle étant différenciée & égalée à zéro, donne $\frac{2xdx}{x-a} - \frac{x^2dx}{(x-a)^2} = 0$, ou après les réductions faites, $x^2dx - 2axdx = 0$, qui donne $x = 2a$, comme ci-devant; mais cette quantité substituée dans $\frac{x^2}{x-a}$, la change en $4a$. Il y a donc un *minimum* pour ce cas.

Si l'on égale le dénominateur $x - a$ de la différentielle à zéro, on a $x = a$, qui indique un *maximum;* & en effet, lorsque $x = a$, la quantité devient infinie. Mais il n'a pas moins le vrai caractère du *maximum*, car soit qu'on suppose x plus petit ou plus grand que a, on trouve une quantité plus petite qu'en supposant $x = a$.

43. Lorsque l'expression d'une quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, renferme quelque multiplicateur ou quelque diviseur constant, on peut supprimer ce multiplicateur ou ce diviseur, avant que de différencier; en effet, supposons que $\frac{ay}{b}$ représente généralement une quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, a & b étant des constantes; il faut donc que $\frac{ady}{b} = 0$; or puisque a & b ne sont pas zéro, il faut que $dy = 0$; la conclusion est donc la même que si y seul eût dû être un *maximum* ou un *minimum*,

c'est-à-dire, la même qu'en supprimant les facteurs & les diviseurs constans. Cette remarque sert à simplifier les calculs, dans plusieurs cas.

44. Proposons-nous maintenant de *trouver entre toutes les lignes que l'on peut mener par un même point* D *donné dans l'angle connu* ABC (fig. 8), *quelle est celle qui forme avec les côtés de cet angle, le plus petit triangle possible.*

Menons par le point D, la ligne DG parallèle au côté AB, & supposant EF une droite quelconque tirée par le point D, abaissons DK perpendiculaire sur BC, & du point E ou EF rencontre AB, abaissons EL aussi perpendiculaire sur BC. La ligne BG est censée connue, ainsi que la perpendiculaire DK; nommons donc $BG = a$, $DK = b$, & la base BF du triangle BEF, nommons-la x. On voit que depuis un certain terme, plus BF croîtra, & plus le triangle augmentera. Au contraire, si BF diminue, on conçoit que le triangle diminuera, mais jusqu'à un certain terme seulement ; car si BF devenoit presqu'égale à BG, la droite EDF seroit presque parallèle à AB, puisqu'elle seroit prête à se confondre avec GD; le triangle seroit alors extrêmement grand. Il y a donc une certaine valeur de BF qui donne le plus petit triangle possible. Pour la trouver, cherchons l'expression générale du triangle BEF. Or les triangles semblables BEF, GDF donnent $GF : BF :: DF : EF$; & les triangles semblables DKF & ELF donnent $DF : EF :: DK : EL$; donc $GF : BF :: DK : EL$; c'est-à-dire, $x - a : x :: b : EL = \frac{bx}{x-a}$; donc la surface du triangle BEF, qui est $\frac{EL \times BF}{2}$, sera

$\frac{bx}{x-a} \times \frac{x}{2}$, ou $\frac{\frac{1}{2}bxx}{x-a}$. Il faut donc qu'en différenciant cette quantité, le numérateur ou le dénominateur devienne zéro, ou bien, comme on peut (43) supprimer le facteur constant $\frac{1}{2}b$, il suffira de différencier $\frac{xx}{x-a}$; mais sans refaire ce calcul que nous avons déjà rencontré (42), nous conclurons, de même, que $x = 2a$; donc si l'on prend $BF = 2a = 2BG$, la ligne FDE que l'on tirera par le point D, donnera le triangle FBE pour le plus petit triangle demandé.

45. *Cherchons maintenant parmi tous les parallélipipèdes de même surface & de même hauteur, quel est celui qui a la plus grande capacité.*

Nommons h la hauteur, cc la surface du parallélipipède; x & y les deux côtés du rectangle qui sert de base. La surface totale est composée de six rectangles, dont deux ont chacun h pour côté ou pour hauteur, & x pour base; deux autres ont h pour hauteur, & y pour base; enfin les deux derniers ont x pour base, & y pour hauteur; ainsi la surface totale a pour expression $2hx + 2hy + 2xy$; c'est-à-dire, que l'on a $2hx + 2hy + 2xy = cc$. Quant à la capacité ou solidité, elle est hxy. Puis donc qu'elle doit être la plus grande de toutes celles de même surface, il faut que sa différentielle $hxdy + hydx$ soit $= 0$, ou (ce qui revient au même) il faut que $xdy + ydx = 0$. Mais l'équation $2hx + 2hy + 2yx = cc$, qui exprime que la surface de tous ces parallélipipèdes est constante ou la même, donne $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$. Substituant donc, dans cette équation, la valeur de dx, tirée de la première, on

aura, après les réductions faites, $y = x$; la base doit donc être un quarré. Pour en connoître le côté, il faut mettre pour y sa valeur x dans l'équation $2hx + 2hy + 2xy = cc$, qui deviendra par-là, $4hx + 2x^2 = cc$, & qui étant résolue, donne $x = -h \pm \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cq)}$, dont la racine $x = -h - \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cc)}$, étant négative, ne peut servir à la question présente; ainsi la valeur convenable de x, est $x = -h + \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cc)}$.

46. Si l'on demande à présent, *quelle doit être la hauteur* h, *pour que le parallélipipède ait la plus grande solidité de tous ceux de même surface*; on remarquera que puisque la hauteur étant h, la base doit être un quarré, cette solidité sera exprimée par hxx; il faut donc que la différentielle de hxx, en regardant h & x comme variables, soit $= 0$; on a donc $2hxdx + xxdh = 0$, ou $2hdx + xdh = 0$, en divisant par x. Mais l'équation $4hx + 2x^2 = cc$, qui exprime alors que la surface est constante, donne, en différenciant, $4hdx + 4xdh + 4xdx = 0$; mettant donc, dans celle-ci, pour dh, sa valeur tirée de l'équation $2hdx + xdh = 0$, on aura, après les réductions faites, $h = x$; donc le parallélipipède cherché doit être un cube, puisque son côté, ou sa hauteur h doit être égal au côté x du quarré qui sert de base. Pour trouver maintenant le côté de ce cube, il faut mettre pour h, sa valeur x dans l'équation $4hx + 2x^2 = cc$, qui deviendra $4x^2 + 2x^2 = cc$ ou $6x^2 = cc$ qui donne $x = \sqrt{\left(\frac{cc}{6}\right)}$. Donc, de tous les parallélipipèdes de même surface, celui qui a la plus grande solidité, est le cube qui a pour côté une ligne égale à la racine quarrée de la sixième partie de cette surface.

47. On s'y prendra de même pour résoudre cette autre question : *Entre tous les cylindres droits de même surface, quel est celui qui a la plus grande capacité ?*

En nommant x le diamètre de la base ; y la hauteur ; représentant par $1 : c$ le rapport du diamètre à la circonférence ; on aura $cx \times y$ pour la surface convexe ; $cxy + \frac{cx^2}{2}$ pour la surface totale ; & $\frac{cx^2y}{4}$ pour la solidité. Cette dernière devant être un *maximum*, sa différentielle doit être zéro ; ainsi on a $\frac{cxydx}{2} + \frac{cx^2dy}{4} = 0$, ou $2ydx + xdy = 0$. D'ailleurs la surface étant constante, sa différentielle est zéro ; ainsi on a également $cxdy + cydx + cxdx = 0$, ou $xdy + ydx + xdx = 0$.

L'équation $2ydx + xdy = 0$, donne $dy = -\frac{2ydx}{x}$. Substituant dans la dernière, on a $-2ydx + ydx + xdx = 0$; d'où l'on tire $y = x$. Ainsi entre tous les cylindres droits de même surface, celui dont la hauteur est égale au diamètre de sa base, a la plus grande capacité. Et réciproquement, entre tous les cylindres droits d'égale capacité, celui dont la hauteur est égale au diamètre de sa base, a la moindre surface.

Donc dans les mortiers à chambre cylindrique, celui dont la chambre a pour profondeur le diamètre de la chambre, est celui où la poudre exerce le moins d'action contre les parois de cette chambre.

48. Cherchons maintenant *entre tous les triangles de même contour & de même base, quel est celui qui a la plus grande surface.*

Soit a la base AB, & c le contour du triangle ABC (*fig.* 9). Abaissons la perpendiculaire CP, & nommons AP, x; CP, y; nous aurons $PB = a - x$, $AC = \sqrt{(xx + yy)}$ & $CB = \sqrt{[(a - x)^2 + yy]}$. Donc le contour sera $\sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{[(a - x)^2 + y^2]} + a$, & la surface sera $\frac{ay}{2}$; on aura donc $\sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{[(a - x)^2 + y^2]} + a = c$, & il faudra que la différentielle de $\frac{ay}{2}$ soit $= 0$; c'est-à-dire, qu'on aura $\frac{ady}{2} = 0$, & par conséquent $dy = 0$. Or l'équation qui exprime que le contour est constant, étant différenciée, donnera $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx + yy)}} + \frac{(a - x) . - dx + ydy}{\sqrt{[(a - x)^2 + yy]}} = 0$, qui à cause que $dy = 0$, se réduit à $\frac{xdx}{\sqrt{(xx + yy)}} - \frac{(a - x) dx}{\sqrt{[(a - x)^2 + yy]}} = 0$, ou divisant par dx, & chassant les fractions, $x \sqrt{[(a - x)^2 + yy]} = (a - x) . \sqrt{(xx + yy)}$. Quarrant, on aura $xx . (a - x)^2 + xxyy = (a - x)^2 . xx + (a - x)^2 . yy$; supprimant de part & d'autre les termes égaux, & divisant chaque membre par yy, nous aurons..... $xx = (a - x)^2$, ou $xx = aa - 2ax + xx$, qui donne $x = \frac{1}{2} a$, & nous fait voir que le triangle doit être isoscèle. Ainsi il faut du milieu de AB, élever une perpendiculaire, & ayant décrit du point B comme centre & d'un rayon égal à la moitié de l'excès du contour c sur la base a, un arc qui coupe cette perpendiculaire en C, si l'on tire CB & CA, on aura le triangle qui a la plus grande surface de tous ceux de même contour & de même base.

49. Si l'on veut savoir maintenant, *quel est généralement entre tous les triangles de même contour, celui*

qui a la plus grande surface, il faut remarquer que quelle que soit la base, on voit par la solution précédente, que x doit toujours en être la moitié; c'est-à-dire, que quel que soit a, on doit toujours avoir $x = \frac{1}{2}a$. Cela étant, l'équation qui exprime le contour, se réduira à $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + a = c$, ou $2\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} = c - a$; quarrant, on aura $aa + 4yy = cc - 2ac + aa$, qui donne $y = \sqrt{\left(\frac{cc - 2ac}{4}\right)}$. La surface du triangle qui est généralement $\frac{ay}{2}$, sera donc $\frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{cc - 2ac}{4}\right)}$. Puis donc qu'elle doit être la plus grande de toutes celles de même contour, quelle que soit d'ailleurs la base a, il faut égaler à zéro la différentielle de ... $\frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{cc - 2ac}{4}\right)}$ ou de $a\sqrt{(cc - 2ac)}$, prise en regardant a comme variable. Nous aurons donc $d[a\sqrt{(cc - 2ac)}]$ ou $d[a(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}}]$, c'est-à-dire, $da(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}} - a.cda(cc - 2ac)^{-\frac{1}{2}} = 0$, ou $da\sqrt{(cc - 2ac)} - \frac{cada}{\sqrt{(cc - 2ac)}} = 0$, ou $da(cc - 2ac) - cada = 0$, ou $ccda - 3cada = 0$, d'où l'on tire $a = \frac{c}{3}$; donc la base a doit être le tiers du contour : & puisque nous avons vu d'ailleurs que le triangle devoit être isoscèle, il s'ensuit donc qu'il doit être équilatéral. Donc de tous les triangles de même contour, le triangle équilatéral est celui qui a la plus grande surface.

50. Dans ces deux solutions, nous n'avons pas

égalé le dénominateur à zéro ; parce que, dans la première, cela nous auroit donné pour x une valeur imaginaire ; & dans la ſeconde, nous aurions trouvé $a = \frac{1}{2} c$, qui n'auroit point ſatisfait non plus à la queſtion : puiſque ſi la baſe étoit la moitié du contour, les deux autres côtés ſe confondroient avec cette baſe, & le triangle eſt alors zéro. A l'avenir, lorſque le numérateur ou le dénominateur, égalé à zéro, ne nous conduira point à une ſolution admiſſible ; nous n'en ferons pas mention pour ne pas nous arrêter à des recherches inutiles.

51. Dans l'avant-dernière queſtion, nous ne ſommes parvenus à déterminer, entre tous les parallélipipèdes de même ſurface, celui qui avoit la plus grande capacité, qu'après avoir conſidéré les parallélipipèdes de même hauteur. Pareillement, dans la dernière queſtion ; nous avons déterminé entre tous les triangles de même contour, quel étoit celui qui avoit la plus grande ſurface, mais en commençant par réſoudre la queſtion pour les triangles de même baſe.

Il eſt ordinairement plus ſimple d'en uſer ainſi ; c'eſt-à-dire, de réſoudre la queſtion en ne faiſant varier enſemble que le plus petit nombre poſſible

de quantités, & faisant varier ensuite & successivement chacune des quantités qui ont été traitées comme constantes.

Par exemple, si l'on demandoit de partager un nombre donné, en trois parties, de manière que le produit de ces trois parties fût le plus grand qu'il est possible; en nommant x & y deux de ces parties, & a le nombre donné, la troisième seroit $a - x - y$, & le produit des trois parties seroit $xy(a - x - y)$, dont il faudroit égaler la différentielle, à zéro. Mais au lieu de différencier en regardant x & y comme variables en même temps, je ne regarderai d'abord que x comme variable; j'aurai donc $aydx - 2xydx - y^2dx = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}(a - y)$. Le produit $xy(a - x - y)$ se change donc en $\frac{1}{4}y(a - y)^2$. Je différencie maintenant, en faisant varier y, & j'ai $\frac{1}{4}dy(a - y)^2 - \frac{2}{4}ydy(a - y)$ que j'égale pareillement à zéro, & j'ai $dy(a - y)^2 - 2ydy(a - y) = 0$, d'où je tire $y = \frac{1}{3}a$; donc x, & la troisième partie $a - x - y$, sont chacune $\frac{1}{3}a$.

52. On peut aussi faire varier ensemble, si l'on veut, toutes les quantités variables; puis rassemblant tous les termes qui sont multipliés par la différentielle d'une même variable, égaler leur somme à zéro, & faire la même chose à l'égard de la différentielle de chaque variable.

Ainsi, dans le dernier exemple, j'aurois $aydx + axdy - 2xydx - x^2dy - 2xydy - y^2dx = 0$, égalant séparément à zéro, la somme des termes affectés

de dx, & celle des termes affectés de dy, j'ai $aydx - 2xydx - y^2dx = 0$, & $axdy - x^2dy - 2xydy = 0$; ou, en divisant la première par ydx, & la seconde par xdy, $a - 2x - y = 0$ & $a - x - 2y = 0$, équation dont il est facile de conclure $x = \frac{1}{3}a$, & $y = \frac{1}{3}a$, comme ci dessus.

La raison de ce procédé est facile à appercevoir, en remarquant qu'il n'y a ici d'autre condition à remplir, sinon que la différentielle totale soit zéro. Or, cette condition ne peut être remplie généralement, que de deux manières; ou, en supposant que chacune des deux différentielles dx & dy, est égale à zéro, ce qui satisferoit en effet, mais ne feroit rien connoître; ou bien, en supposant que la somme des termes qui multiplient dx, ainsi que celle des termes qui multiplient dy, sont chacune zéro; ce qui est précisément ce que nous avons prescrit.

53. Lorsque les conditions de la question sont exprimées par plusieurs équations, il faut avant d'appliquer cette règle à l'équation différencielle qui doit déterminer le *maximum* ou le *minimum*, tirer des autres équations différenciées, les valeurs des différencielles d'autant de variables qu'il y a d'équations outre celle-là, & les introduire dans cette même équation; alors on applique la règle comme s'il n'y avoit eu que cette seule équation.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, du plus grand parallélipipède, nous avions cette équation $2hx + 2hy + 2xy = cc$, & la condition que hxy devoit être un

maximum. Si donc nous voulons regarder tout-à-la-fois ; h, x & y comme variables, l'équation $2hx +$ &c. donnera en différenciant, $2hdx + 2xdh + 2hdy + 2ydh + 2xdy + 2ydx = 0$; & la condition du *maximum* donnera $hxdy + hydx + xydh = 0$. De la première, je tire $dh = \frac{-ydx - xdy - hdy - hdx}{x+y}$; substituant cette valeur dans la seconde, j'ai, après les réductions ordinaires, $hx^2dy + hy^2dx - xy^2dx - x^2ydy = 0$. Je puis maintenant égaler à zéro, la somme des termes qui multiplient dx, & celle des termes qui multiplient dy. J'aurai $hy^2 - xy^2 = 0$ ou $h = x$, & $hx^2 - x^2y = 0$; d'où en divisant tout, par le facteur commun x^2, on tire $h - y = 0$, qui donne $h = y$; & puisque l'on a $h = x$, on a donc aussi $y = x$; les trois dimensions h, x, y, sont donc égales, ce qui s'accorde avec la première solution ; & en mettant ces valeurs dans l'équation $2hx + 2hy + 2xy = cc$, on a $6h^2 = cc$, qui donne $h = \sqrt{\left(\frac{cc}{6}\right)}$ comme dans cette même solution.

54. Non-seulement on peut ne faire varier les quantités que successivement, ou les faire varier toutes à la fois, mais on peut encore prendre pour constantes telles parties que l'on voudra de ces quantités, pourvu que le nombre de ces nouvelles conditions arbitraires, réuni à celui des conditions de la question, ne soit pas plus grand que le nombre des variables, x, y, z, qui entrent dans la question. Cette remarque peut être de la plus

grande utilité dans plusieurs questions, principalement quand il y a des quantités radicales.

Des Rayons de courbure, ou de la Développée.

55. Si l'on conçoit que sur chacun des points M, m, m', &c. d'une ligne courbe quelconque (*fig.* 10), on ait élevé des perpendiculaires MN, mn, $m'n'$, &c; les intersections consécutives n, n', &c. formeront une ligne courbe à laquelle on a donné le nom de *développée*, parce que si on la conçoit enveloppée d'un fil ABN qui la touche en son origine B; alors en développant cette courbe, l'extrémité A du fil trace la courbe AM. En effet, dans le développement de Nn, par exemple, en considérant Nn comme une petite ligne droite, le fil MNn décrit autour du point n comme centre, l'arc Mm auquel il est nécessairement perpendiculaire, puisque le rayon d'un cercle est perpendiculaire à sa circonférence.

56. La courbe AM étant donnée, si l'on veut, pour un point quelconque M, déterminer la valeur de Mn, qu'on appelle *Rayon de la développée*, on remarquera que Mn est déterminé par le concours de deux perpendiculaires infiniment voisines MN & mn. C'est pourquoi (*fig.* 11),

on imaginera deux arcs consécutifs Mm, mm' infiniment petits & infiniment peu différens, que l'on considérera comme deux lignes droites; on imaginera aussi MN perpendiculaire en M sur Mm & mN perpendiculaire en m sur mm'. Alors dans le triangle NMm, rectangle en M, on aura $1 : \text{sin.}\ MNm :: mN$ ou $MN : Mm$, ou (à cause que l'angle MNm est infiniment petit) $1 : MNm :: mN$ ou $MN : Mm$; donc $MN = \frac{Mm}{MNm}$; or, si on prolonge Mm, l'angle $umm' = MNm$, parce que ces deux angles sont complémens du même angle MmN, à cause des angles droits NMm, & Nmm'; donc $MN = \frac{Mm}{umm'}$.

Si l'on mène Mr & mr' parallèles à AP, il est facile de voir que l'angle umr' étant égal à mMr, l'angle umm' est la quantité dont l'angle mMr diminue, ou la différentielle de l'angle rMm, laquelle doit être prise négativement ici, où la courbe est concave, & au contraire, doit être prise positivement quand la courbe est convexe; on a donc $MN = \frac{Mm}{\mp d(rMm)}$. Cherchons donc l'expression de $d\,(rMm)$. Or la tangente de rMm est $\frac{dy}{dx}$, & son cosinus (en nommant ds l'arc

l'arc Mm ou $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$) est $\frac{dx}{ds}$, ainsi qu'il est aisé de le conclure de ce que le triangle rMm est rectangle; & nous avons vu (24) que z étant un angle quelconque, on avoit $dz = (\text{cos. } z)^2 \, d\,(\text{tang. } z)$; donc $d\,(rMm) = \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$; donc enfin $MN = \frac{ds}{\mp \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ $= \frac{ds^3}{\mp dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. C'est-là la formule pour trouver les rayons de la développée, quand les ordonnées sont parallèles.

57. Pour appliquer ces formules à quelques exemples, supposons que la courbe AM soit un cercle qui ait pour équation $yy = 2ax - xx$; nous aurons $y = \sqrt{(2ax - xx)}$; donc $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$; $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ sera donc $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, & $\frac{dy}{dx}$ sera $\frac{a - x}{\sqrt{(2ax - xx)}}$; donc $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-a^2 dx}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$; la formule qui convient au cas présent, où la courbe est concave, & où les ordonnées sont parallèles, est $\frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; elle se changera donc en.........
$$\frac{\frac{a^3 dx^3}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{a^2 dx^3}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}} = a$$; c'est-à-dire, que le rayon de la

développée eſt toujours de même grandeur & égal au rayon du cercle, enſorte que la développée ſe réduit à un point qui eſt le centre; ce qui s'accorde avec ce que l'on connoît.

Prenons pour ſecond exemple, la parabole qui a pour équation $y^2 = ax$, ou $y = \sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, nous aurons $dy = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$; donc $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + \frac{1}{4} a x^{-1} dx^2)} = dx \sqrt{\left(1 + \frac{a}{4x}\right)} = dx \sqrt{\left(\frac{4x + a}{4x}\right)} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{(4x + a)}$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$; donc $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx$, la formule $\frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ devient donc..........

$$\frac{\frac{1}{8} x^{-\frac{3}{2}} dx^3 (4x + a)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 \times \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx} = \frac{1}{2} \frac{(4x + a)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{4x + a}{2} \sqrt{\left(\frac{4x + a}{a}\right)}.$$

58. Les rayons de la développée ſervent à meſurer la courbure d'une courbe en chaque point. Puiſque dans le développement de l'élément Nn de la courbe BN (*fig.* 10), le fil trace le petit arc mm', cet arc mm' a donc même courbure que le cercle qui auroit pour rayon mn. Ainſi, quand on a l'expreſſion du rayon de la développée, on a pour chaque point, le rayon du cercle qui a même courbure que la courbe, en ce point. Et comme la courbure d'un cercle eſt d'autant plus

grande que son rayon est plus petit ; c'est-à-dire, que les courbures des cercles sont en raison inverse de leurs rayons, il sera donc facile de comparer la courbure d'une courbe, en un point quelconque, avec la courbure de cette même courbe, ou d'une autre, en un point quelconque. Ainsi, si je voulois comparer la courbure de la parabole, à son origine, avec celle qu'elle a à l'extrémité de l'ordonnée qui passe par le foyer, je remarquerois qu'à l'origine on a $x = 0$, & que l'abscisse qui répond au foyer, est $\frac{1}{4} a$ (*Alg.* 291). Faisant donc successivement, dans l'expression du rayon de la développée $x = 0$, & $x = \frac{1}{4} a$, j'ai $\frac{1}{2} a$ & $a \sqrt{2}$, le rayon de la développée est donc $\frac{1}{2} a$, à l'origine, & il est $a \sqrt{2}$ à l'extrémité de l'ordonnée qui passe par le foyer ; donc la courbure, au premier de ces points, est à la courbure au second, $:: a \sqrt{2} : \frac{1}{2} a$, ou $:: 2 \sqrt{2} : 1$.

Puisque le rayon *MN* de la développée n'est autre chose que le fil qui enveloppoit, ou que l'on peut concevoir avoir enveloppé la courbe *BN*, il s'ensuit donc qu'il est égal en longueur à l'arc *BN* plus la partie *AB* dont le fil excédoit la courbe, lorsque le développement a commencé, c'est à-dire, plus le rayon de la développée à l'origine *A*. Donc la courbe *BN* est rectifiable, c'est-à dire, qu'on peut assigner la longueur de chacun de ses arcs *BN*.

ÉLÉMENS
DU CALCUL INTÉGRAL.

59. Il s'agit ici de revenir des quantités différencielles, aux quantités finies, dont la différenciation a produit celles-là : la méthode qui enſeigne comment ſe fait ce retour, s'appelle le *Calcul intégral.*

Il n'y a point de quantité variable exprimée algébriquement, dont on ne puiſſe trouver la différencielle ; mais il y a un grand nombre de quantités différencielles * que l'on ne peut intégrer : les unes, parce qu'en effet elles n'ont pu réſulter d'aucune différenciation ; telles ſont les quantités $x\,dy$, $x\,dy - y\,dx$, &c. les autres, parce qu'on n'a point encore trouvé de méthodes pour les intégrer ; & parmi celles-ci, il y en a dont on a lieu de déſeſpérer d'avoir jamais l'intégrale.

Quoi qu'il en ſoit, on peut tirer un parti très-avantageux de celles que l'on ſait intégrer : nous allons tâcher de les faire connoître : nous verrons enſuite ce qu'on doit faire à l'égard de celles qui

* Par *quantité différencielle*, nous entendons ici, non-ſeulement celle qui réſulte d'une différenciation, mais en général, toute quantité affectée des différencielles dx, dy, &c. d'une ou de pluſieurs variables.

ſe refuſent à l'intégration. Commençons par nous expliquer ſur quelques façons de parler dont nous ferons uſage.

Nous appellerons *fonction* d'une quantité, toute expreſſion de calcul dans laquelle cette quantité entrera, de quelque manière qu'elle y entre d'ailleurs. Ainſi, x, $a + bx^2$, $\sqrt[n]{(ax^n + bx^p)}$, &c. ſont des fonctions de x.

Nous entendons par *quantités algébriques*, celles dont la valeur exacte peut être aſſignée, en exécutant un nombre déterminé d'opérations de l'Algèbre & de l'Arithmétique, autres que celles qui dépendent des logarithmes. Au contraire, nous appellerons *quantités non algébriques*, celles dont on ne peut aſſigner que des valeurs approchées, ou qui ſuppoſent des approximations : les logarithmes ſont dans ce cas, & il y en a une infinité d'autres.

Pour indiquer l'intégrale d'une différencielle, nous nous ſervirons de la lettre $\int$ que nous mettrons devant cette quantité : cette lettre équivaudra à ces mots *ſomme de*, parce que *intégrer*, ou *prendre l'intégrale*, n'eſt autre choſe que ſommer tous les accroiſſemens infiniment petits que la quantité a dû prendre pour arriver à un état déterminé.

Des Différencielles à une seule variable, qui ont une intégrale algébrique ; & premièrement des différencielles monomes.

60. Règle fondamentale. *Pour intégrer une différencielle monome, il faut 1° augmenter l'exposant de la variable d'une unité ; 2° diviser par cet exposant ainsi augmenté de l'unité, & par la différencielle de la variable ;* c'est-à-dire, diviser par ce nouvel exposant multiplié par la différencielle de la variable.

La raison de cette règle ne doit pas être cherchée ailleurs que dans le principe même de la différenciation (10). Comme il s'agit de retrouver la quantité qui avoit été différenciée, il est visible qu'il faut appliquer des opérations contraires à celles qui ont été prescrites pour la différenciation.

Cela posé, appliquons la règle.

$\int 2x\,dx$ ou $\int 2x^1\,dx = \frac{2x^{1+1}\,dx}{(1+1)\,dx} = x^2$; $\int x\,dx = \frac{x^2\,dx}{2\,dx} = \frac{x^2}{2}$. En effet, $d(x^2) = 2x\,dx$; $d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2x\,dx}{2} = x\,dx$.

De même $\int a x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{a x^{\frac{2}{3}+1}\,dx}{(\frac{2}{3}+1)\,dx} = \frac{a x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} a x^{\frac{5}{3}}$.

Pareillement $\int \frac{a\,dx}{x^3}$, ou $\int a x^{-3} dx = \frac{a x^{-3+1} dx}{(-3+1)dx} = \frac{a x^{-2}}{-2} = \frac{-a}{2x^2}$.

En général, m étant un exposant positif ou négatif, entier ou fractionnaire, on aura $\int a x^m dx = \frac{a x^{m+1} dx}{(m+1)dx} = \frac{a x^{m+1}}{m+1}$.

On n'a pas besoin de cette règle pour trouver l'intégrale de dx, ni de $a\,dx$, que l'on voit aisément devoir être x pour la première, & ax pour la seconde. Mais si l'on vouloit y appliquer la règle, on remarqueroit que l'exposant de x dans ces différencielles est zéro, & qu'elles sont la même chose que $x^0 dx$ & $a x^0 dx$, dont l'intégrale, suivant la règle, est $\frac{x^{0+1} dx}{(0+1)dx}$ & $\frac{a x^{0+1} dx}{(0+1)dx}$, ou x & ax.

Il n'y a qu'un cas qui échappe à la règle fondamentale; c'est celui où l'exposant m auroit pour valeur -1; car alors l'intégrale devient $\frac{a x^{-1+1}}{-1+1}$ ou $\frac{a x^0}{0}$ ou $\frac{a}{0}$, quantité inassignable, parce qu'elle est infinie : en effet, si l'on conçoit que le dénominateur, au lieu d'être zéro, soit une quantité infiniment petite, on voit qu'il doit être contenu une infinité de fois dans la quantité finie a, & que par conséquent la fraction seroit infinie. Nous expliquerons, par la suite, pourquoi le calcul donne ici une quantité infinie; mais en attendant, nous ferons remarquer que la différencielle proposée $a x^m dx$ qui est alors $a x^{-1} dx$, ou $\frac{a\,dx}{x}$ est une différencielle de logarithme; c'est celle de $a l x$ ou de $l x^a$, ainsi qu'on peut le voir aisément en différenciant (27).

Si la différencielle monome avoit un radical, on substitueroit au radical, un exposant fractionnaire. Ainsi pour intégrer $a\,d\,x\sqrt[3]{x^2}$, on intégrera $a\,d\,x\,.\,x^{\frac{2}{3}}$ ou $a\,x^{\frac{2}{3}}\,d\,x$, ce qui se fera comme ci-dessus.

Remarque.

61. Nous avons vu (8) que lorsque dans les quantités qu'on avoit à différencier, il se trouvoit des termes tout constans, ces termes ne se trouvoient plus dans la différencielle. Donc, lorsqu'on remonte à l'intégrale, il faut avoir soin d'ajouter une quantité constante à l'intégrale. Cette constante aura telle valeur que l'on voudra, tant qu'on n'aura pas d'autre objet que de trouver l'intégrale, c'est-à-dire, de trouver une quantité telle qu'en la différenciant, on reproduise la différencielle proposée; en effet, $\frac{a\,x^{m+1}}{m+1}$ & $\frac{a\,x^{m+1}}{m+1} + C$, C étant une constante quelconque, auront également pour différencielle la quantité $a\,x^m\,d\,x$, quelque valeur qu'on donne à C. Mais lorsque l'intégration se fait dans la vue de satisfaire à une question que l'on s'est proposée, alors cette constante a une valeur que l'état de la question détermine : nous verrons cela par la suite; mais, à l'avenir, nous aurons toujours soin d'en ajouter une à la suite de chaque

intégration ; & afin qu'on la reconnoiſſe pour telle, nous la déſignerons toujours par la même lettre C.

Des Différencielles complexes dont l'intégration rentre dans la règle fondamentale.

62. 1°. On peut encore intégrer par la règle précedente toute quantité dans laquelle il n'entrera point de puiſſances de quantités complexes, ni des diviſeurs complexes, à moins que ces derniers ne fuſſent des quantités conſtantes.

Ainſi pour intégrer $ax^3dx + \frac{bx^2dx}{c} + cdx$, j'intégrerai ſéparément chaque terme, & j'aurai $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3c} + cx + C$. Pareillement l'intégrale de $ax^3dx + \frac{bdx}{x^4}$, ou de $ax^3dx + bx^{-4}dx$, eſt $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^{-3}}{-3} + C$, ou $\frac{ax^4}{4} - \frac{b}{3x^3} + C$.

63. 2°. Quand même il entreroit des puiſſances des quantités complexes, on intégreroit encore par la règle fondamentale, pourvu qu'elles ne ſe trouvaſſent point au dénominateur, & qu'en même-temps leur expoſant fût un nombre entier poſitif.

Par exemple, $(a + bx^2)^3 \times dx$ s'intégreroit par la

règle précédente, en élevant actuellement $a + bx^2$ à la troisième puissance, ce qui (*Alg.* 126) donneroit $a^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x^4 + b^3x^6$, & par conséquent $(a + bx^2)^3 dx = a^3dx + 3a^2bx^2dx + 3ab^2x^4dx + b^3x^6dx$, dont l'intégrale; prise terme à terme, est $a^3x + \frac{3a^2bx^3}{3} + \frac{3ab^2x^5}{5} + \frac{b^3x^7}{7} + C$.

64. Comme il n'y a pas de quantité complexe élevée à une puissance dont l'exposant seroit un nombre entier positif, que l'on ne puisse, par la même règle donnée (*Alg.* 126), réduire, ainsi, à une suite finie de monomes, on pourra donc toujours intégrer toute quantité complexe qui ne renfermeroit d'autres parties complexes que des puissances dont l'exposant seroit un nombre entier positif.

Ainsi, si j'avois à intégrer $gx^3dx(a + bx^2)^2 + a^2x^7dx(c + ex^2 + fx^3)^4$, je développerois par la règle citée, la valeur de $(a + bx^2)^2$, & je multiplierois chaque terme du résultat, par gx^3dx; je développerois pareillement la valeur de $(c + ex^2 + fx^3)^4$, & je multiplierois chaque terme du résultat, par a^2x^7dx; alors je n'aurois plus à intégrer qu'une suite de monomes, ce qui est le cas de la règle fondamentale.

65. Il faut excepter ici, le cas où quelqu'un des exposans étant négatif, il arriveroit qu'après le développement & la multiplication, l'exposant de la variablee, dans quelqu'un des termes, seroit

-1 ; mais dans ce cas on intégreroit par logarithmes.

Par exemple, si j'avois $\frac{a\,dx}{x^3}(a+bx)^2$, ou $ax^{-3}dx(a+bx^2)^2$; je le changerois en $ax^{-3}dx(a^2+2abx^2+b^2x^4)$ qui revient à $a^3x^{-3}dx+2a^2bx^{-1}dx+ab^2xdx$, dont les deux termes $a^3x^{-3}dx+ab^2xdx$ ont pour intégrale $\frac{-a^3x^{-2}}{2}+\frac{ab^2x^2}{2}$; mais le terme $2a^2bx^{-1}dx$ qui est la même chose que $2a^2b\frac{dx}{x}$, est (27) la différencielle logarithmique de $2a^2blx$; ensorte que l'intégrale totale est $-\frac{a^3x^{-2}}{2}+\frac{ab^2x^2}{2}+2a^2blx+C$.

66. 3°. Si la quantité différencielle proposée renferme même une quantité complexe, élevée à une puissance quelconque (dont l'exposant soit entier ou fractionnaire, positif ou négatif), on intégrera encore, si la totalité des quantités qui multiplie cette quantité complexe, est la différencielle de cette même quantité complexe, considérée sans son exposant total ; ou si elle est cette différencielle multipliée ou divisée par un nombre constant. Il ne faudra pour cela, que regarder la quantité complexe dont il s'agit, comme une seule variable, & appliquer mot à mot la règle fondamentale.

Par exemple, $g\,dx\,(a+bx)^s$ est dans ce cas, parce que $g\,dx$ est la différencielle de $a\pm bx$, multipliée par

$\frac{g}{b}$ qui est une quantité constante; ainsi pour l'intégrer j'écris $\int g\,dx\,(a+bx)^p = \frac{g\,dx\,(a+bx)^{p+1}}{(p+1)\,d\,(a+bx)} + C =$
$\frac{g\,dx\,(a+bx)^{p+1}}{(p+1)\,b\,dx} + C = \frac{g\,(a+bx)^{p+1}}{(p+1)\,b} + C.$

En effet, si l'on différencie cette nouvelle quantité, on retrouve $g\,dx\,(a+bx)^p$.

En examinant de même la différencielle $\frac{a^2dx + 2ax\,dx}{\sqrt{(ax+xx)}}$, ou $(a^2dx + 2ax\,dx)\,(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, on trouvera qu'elle est intégrable, parce que $a^2dx + 2ax\,dx$ est la différencielle de $ax+xx$, multipliée par une constante a. Appliquant donc la règle, on aura $\int (a^2dx + 2ax\,dx)$ $(ax+xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(a^2dx + 2ax\,dx)\,(ax+xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\,(a\,dx + 2x\,dx)} + C =$
$2a\,(ax+xx)^{\frac{1}{2}} + C.$

Le seul cas, à excepter, est celui où l'exposant de la quantité complexe seroit -1, alors on intègre par logarithmes, ainsi que nous le verrons par la suite.

Des Différencielles binomes qui peuvent s'intégrer algébriquement.

67. Nous entendons par différencielle binome, celle où la quantité complexe la plus composée, est une puissance quelconque d'un binome.

Ainsi $g\,x^5\,dx\,(a+bx^2)^{\frac{3}{5}}$ est une différencielle binome. Il en est de même de $g\,x^m\,dx\,(a \pm bx^n)^p$ qui peut

représenter toute différencielle binome, parce que par g, a, b, m, n, p, on peut entendre tous les nombres imaginables positifs ou négatifs.

On ne sait pas intégrer généralement, toute différencielle binome. Mais on voit, par ce qui précède, qu'on sait intégrer une différencielle binome $g x^m dx (a + b x^n)^p$, dans les deux cas suivans:

1°. Quand p est un nombre entier positif quelconque, quels que soient d'ailleurs les exposans m & n (63), à l'exception du cas mentionné (65).

2°. Quant l'exposant m de x hors du binome, est moindre d'une unité que l'exposant n de x dans le binome; c'est-à-dire, qu'on peut intégrer généralement $g x^{n-1} dx (a + b x^n)^p$, quels que soient n & p, excepté le cas où $p = -1$. En effet $g x^{n-1} dx$ est la différencielle de $a + b x^n$, multipliée par $\frac{g}{nb}$, c'est-à-dire, par une constante; on rentre donc dans le cas dont il est question (66); & par conséquent on intégrera, comme il y a été enseigné, c'est-à-dire, par la règle fondamentale, en regardant $a + b x^n$ comme une seule quantité.

Outre ces cas, il y en a encore deux autres que l'on peut comprendre en un seul, & qui comprennent le précédent : nous allons les faire connoître.

68. 1°. On peut intégrer toute différencielle binome, dans laquelle l'exposant de x hors du binome, étant augmenté d'une unité, pourra être divisé exactement par l'exposant de x dans le binome, & donnera pour quotient un nombre entier positif. Le procédé qu'il faut suivre dans ce cas, pour intégrer, ainsi que pour démontrer que cela est général, consiste à égaler la quantité binome (sans son exposant total), à une seule variable, & à exprimer la différencielle proposée à l'aide de cette variable seule & de constantes; ce à quoi on peut toujours parvenir facilement, en opérant comme dans les exemples suivans.

Proposons-nous d'abord d'intégrer $gx^3 dx(a + bx^2)^{\frac{4}{3}}$. Je vois que cette différencielle est intégrable, parce que l'exposant de x hors du binome, c'est-à-dire, 3, étant augmenté d'une unité, donne 4, qui divisé par l'exposant 2 de x dans le binome, donne pour quotient 2, nombre entier positif.

Je fais donc $a + bx^2 = z$. De cette équation je tire $x^2 = \frac{z-a}{b}$. Je remarque que $x^3 dx$ qui précède la quantité binome, vient (à un multiplicateur constant près) de la différenciation de x^4 quarré de x^2 : j'élève donc, au quarré, l'équation $x^2 = \frac{z-a}{b}$, & j'ai $x^4 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2$; donc en différenciant, j'aurai $4x^3 dx = 2 \cdot \left(\frac{z-a}{b}\right) \cdot \frac{dz}{b}$, & par conséquent $x^3 dx = \left(\frac{z-a}{b}\right)\frac{dz}{2b} = \frac{(z-a)dz}{2b^2}$.

Substituant pour $x^3 dx$, & pour $(a + bx^2)$, leurs valeurs en z, dans $gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$, j'ai $\frac{g.(z-a)dz}{2b^2} \times z^{\frac{4}{5}}$ ou $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2}$. Donc $\int gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$ $= \int \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2} - \int \frac{gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2} = \frac{gz^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2b^2} + C$, ou, (à cause que $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}$ est multiplicateur commun) $=$ $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left(\frac{z}{(\frac{4}{5}+2)} - \frac{a}{\frac{4}{5}+1}\right) + C = \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left(\frac{5}{14}z - \frac{5}{9}a\right) + C$; remettant donc pour z, sa valeur $a + bx^2$, nous aurons $\frac{g}{2b^2}(a+bx^2)^{\frac{4}{5}+1}\left[\frac{5}{14}(a+bx^2) - \frac{5}{9}a\right] + C$.

69. On opèrera d'une manière semblable, pour tout autre cas assujetti aux mêmes conditions. Prenons, par exemple, $gx^8dx(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, qui doit être intégrable, puisque l'exposant 8 augmenté de 1, c'est-à-dire, 9, étant divisé par l'exposant 3 de x, dans le binome, donne un nombre entier positif. Je ferai donc $a + bx^3 = z$; j'aurai $x^3 = \frac{z-a}{b}$: & comme x^8dx qui précède le binome, vient (à un multiplicateur constant près) de la différenciation de x^9, pour avoir x^9 je cuberai l'équation $x^3 = \frac{z-a}{b}$: j'aurai $x^9 = \frac{(z-a)^3}{b}$; différentiant pour avoir x^8dx, j'ai $9x^8dx = 3.\left(\frac{z-a}{b}\right)^2\frac{dz}{b}$,

& par conséquent $x^2 dx = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2 \frac{dz}{3b}$. La différencielle $g x^8 dx (a + bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, se changera donc en $g \left(\frac{z-a}{b}\right)^2 \cdot \frac{dz}{3b} \cdot z^{-\frac{2}{3}}$, ou (en faisant les opérations indiquées, c'est-à-dire, élevant $\frac{z-a}{b}$ au quarré, & multipliant par $z^{-\frac{2}{3}}$) $\frac{g z^{2-\frac{2}{3}}}{3b^3} dz - \frac{2 g a z^{1-\frac{2}{3}} dz}{3b^3} + \frac{g a^2 z^{-\frac{2}{3}} dz}{3b^3}$, dont l'intégrale est $\frac{g z^{3-\frac{2}{3}}}{3b^3(3-\frac{2}{3})} - \frac{2 g a z^{2-\frac{2}{3}}}{3b^3(2-\frac{2}{3})} + \frac{g a^2 z^{1-\frac{2}{3}}}{3b^3(1-\frac{2}{3})} + C$, qui, à cause du multiplicateur commun $\frac{g}{3b^3} z^{1-\frac{2}{3}}$, se réduit à $\frac{g}{3b^3} z^{1-\frac{2}{3}} \left(\frac{z^2}{3-\frac{2}{3}} - \frac{2az}{2-\frac{2}{3}} + \frac{a^2}{1-\frac{2}{3}}\right) + C$, ou $\frac{g}{3b^3} z^{1-\frac{2}{3}} \left(\frac{3z^2}{7} - \frac{6az}{4} + 3a^2\right) + C$, ou enfin, en remettant pour z sa valeur $a + bx^3$, l'intégrale est $\frac{g}{3b^3} (a + bx^3)^{1-\frac{2}{3}} [\frac{3}{7}(a + bx^3)^2 - \frac{6a}{4}(a + bx^3) + 3a^2] + C$.

Telle est la méthode qu'il faudra suivre toutes les fois que l'exposant de x hors du binome, étant augmenté d'une unité, & divisé par l'exposant de x dans le binome, donnera pour quotient un nombre entier positif.

70. 2°. Quoiqu'une quantité différencielle binome ne soit pas dans le cas dont nous venons de

de parler, il arrive néanmoins, assez souvent, qu'on peut l'y ramener, à l'aide d'une préparation assez simple, & qui consiste à rendre négatif l'exposant de x dans le binome lorsqu'il est positif, ou positif lorsqu'il est négatif. Pour cet effet, il faut diviser les deux termes du binome, par la puissance de x qui se trouve dans ce binome, & multiplier hors du binome, par cette même puissance élevée à la puissance marquée par l'exposant total du binome.

Par exemple, pour rendre négatif l'exposant 2 de x dans le binome $gx^4dx\,(a+bx^2)^5$, je divise $a+bx^2$ par x^2, ce qui me donne $gx^4dx\,(\frac{a}{x^2}+b)^5$, ou $gx^4dx\,(ax^{-2}+b)^5$; mais comme la quantité x^2 par laquelle on a divisé, est censée élevée à la cinquième puissance, puisqu'elle est comprise sous l'exposant total 5 du binome, il faut, par compensation, multiplier au-dehors, par $(x^2)^5$, c'est-à-dire, (*Alg.* 96) par x^{10}, ce qui donne $gx^{14}dx\,(ax^{-2}+b)^5$.

En appliquant cette préparation, on trouvera que plusieurs différencielles binomes qui ne seroient pas comprises dans le cas précédent, y reviendront.

Par exemple, si l'on me donnoit à intégrer.........
$\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{1}{2}}}$, ou $aadx\,(aa+xx)^{-\frac{1}{2}}$; je vois que l'exposant de x hors du binome, c'est-à-dire, 0, étant augmenté de 1, ce qui fait 1, ne peut être divisé exactement par l'exposant 2 de x dans le binome; ma j'aurois tort d'en conclure que la quantité proposée n'e

par intégrable ; car si je rends négative la puissance de x dans le binome, en écrivant........................ $aa(x^2)^{-\frac{3}{2}}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$ qui se réduit à $aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$, je vois alors que -3 augmenté de 1, c'est-à-dire, $-3+1$ ou -2, étant divisé par l'exposant -2 de x dans le binome, donne pour quotient un nombre entier positif ; ainsi faisant $aax^{-2}+1=z$, j'en tire $x^{-2}=\frac{z-1}{aa}$; & comme $x^{-3}dx$ est (à un multiplicateur constant près) la différencielle de x^{-2}, je différencie, & j'ai $-2x^{-3}dx=\frac{dz}{aa}$; d'où je tire $x^{-3}dx=-\frac{dz}{2aa}$. La différencielle $aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$ se change donc en $\frac{-aadz}{2aa}\cdot z^{-\frac{3}{2}}$, ou $\frac{-z^{-\frac{3}{2}}dz}{2}$, dont l'intégrale est $\frac{-z^{1-\frac{3}{2}}}{2\cdot(1-\frac{3}{2})}+C$, ou $z^{-\frac{1}{2}}+C$, ou (en remettant pour z sa valeur) $(aax^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}+C$, ou $\frac{1}{\sqrt{(aax^{-2}+1)}}+C$, qui se réduit à $\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}+C$. Ainsi le procédé pour intégrer, est le même dans ce cas, que dans le précédent.

71. Nous avons supposé qu'il n'y avoit de puissance de x, que dans l'un des deux termes du binome. S'il y en avoit dans tous les deux, on rameneroit la quantité à n'en avoir que dans un, en divisant le binome par l'une des deux puissances de x, qui se trouvent dans l'un de ses termes,

& multipliant au dehors par la même puissance élevée à la puissance marquée par l'exposant du binome ; & cela par la même raison que nous venons de donner (70), pour rendre l'exposant négatif.

Ainsi, si l'on me proposoit d'intégrer $\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}}$, ou $aax^{-1}dx\,(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, je le changerois en $aax^{-1}\,(x)^{-\frac{1}{2}}dx\,(a+x)^{-\frac{1}{2}}$, en divisant le binome par x, & multipliant, au dehors, par x élevé à la puissance $-\frac{1}{2}$ qui est celle du binome. Cette quantité se réduit à $aax^{-\frac{3}{2}}dx\,(a+x)^{-\frac{1}{2}}$. Si on lui applique la règle du premier cas (68), on ne trouvera point que cette quantité soit intégrable ; mais en rendant négatif l'exposant de x dans le binome, on aura.................. $aax^{-\frac{3}{2}}\cdot(x)^{-\frac{1}{2}}dx\,(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$, ou $aax^{-2}dx\,(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ qui (68) est intégrable. Faisant donc $ax^{-1}+1=z$, on aura $x^{-1}=\frac{z-1}{a}$; différenciant, on a $-x^{-2}dx=\frac{dz}{a}$, ou $x^{-2}dx=\frac{-dz}{a}$; donc $aax^{-2}dx\,(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ se change en $-adz\cdot z^{-\frac{1}{2}}$, ou $-az^{-\frac{1}{2}}dz$, dont l'intégrale est $\frac{-az^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$, ou $-2az^{\frac{1}{2}}+C$, ou (en remettant pour z sa valeur) $-2a\,(ax^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}+C$, ou enfin $-2a\sqrt{(\frac{a}{x}+1)}+C$.

Lorſqu'on aura fait ſur une différencielle binome, l'examen des deux cas que nous venons d'expoſer, ſi elle ne ſe rapporte à aucun, alors il eſt inutile d'attendre une intégrale purement algébrique.

Quant aux différencielles trinomes, quadrinomes, &c. c'eſt-à dire, dont la quantité complexe renferme trois, quatre, &c. termes, elles ſont intégrables dans les cas énoncés (62 & *ſuiv*). Il y a encore quelques cas où elles admettent une intégrale algébrique; mais ces cas ſont en fort petit nombre, & ſe préſentent rarement; ainſi nous ne nous en occuperons point ici.

Nous donnerons plus bas la méthode de découvrir celle qui ſont intégrables, & celles dont l'intégrale peut être rapportée à une intégrale donnée.

Application des Règles précédentes, à la quadrature des courbes.

72. Pour trouver la ſurface ou (ce qui revient au même) la quadrature des lignes courbes, on ſe repréſente ces lignes comme des polygones d'une infinité de côtés; & des extrémités M & m de chaque côté (*fig.* 12), on imagine les perpendiculaires MP, mp, ſur l'axe des abſciſſes, ce qui décompoſe la ſurface en une infinité de trapèzes

infiniment petits. Alors on regarde chaque trapèze, tel que $PpmM$ comme la différencielle de l'espace fini APM; parce qu'en effet, $PpmM = Apm - APM = d\,(APM)$. Il ne s'agit donc que d'exprimer algébriquement le petit trapèze $PpmM$, & d'intégrer ensuite cette expression, à l'aide des règles précédentes.

Mais en considérant $PpmM$ comme différencielle de la surface, il faut remarquer, qu'il n'est pas plutôt la différencielle de la surface comptée depuis l'origine A des abscisses, qu'il n'est la différencielle de tout autre espace $KPML$ compté depuis un point fixe & déterminé K, puisqu'on a également $PpmM = KpmL - KPML = d\,(KPML)$. Donc, lorsqu'on intégrera, on n'a pas droit d'attribuer l'intégrale que donnera immédiatement le calcul, plutôt à l'espace APM, qu'à toute autre espace $KPLM$ qui en diffère d'un espace déterminé & constant KAL. Il faudra donc ajouter à l'intégrale trouvée par le calcul, une constante qui exprime ce dont l'espace que l'on a dessein de déterminer, diffère de celui que donne immédiatement le calcul ; nous verrons, dans les exemples que nous allons donner, comment on détermine cette constante. Cherchons d'abord l'expression de l'espace $PpmM$.

Nommons AP, x; PM, y; nous aurons

$Pp = dx$, $pm = y + dy$. La surface du trapèze $PpmM$ (*Géom.* 142) est $\frac{PM + pm}{2} \times Pp = \frac{2y + dy}{2} \times dx = ydx + \frac{dydx}{2}$. Mais pour exprimer que Mm est infiniment petit, il faut rejeter $\frac{dydx}{2}$ qui est infiniment petit à l'égard de ydx; on aura donc ydx pour l'expression générale de la différencielle ou de l'élément de la surface de toute courbe.

Pour appliquer cette formule à une surface proposée dont on auroit l'équation, il faut tirer de cette équation, la valeur de y, que l'on mettra dans la formule ydx; alors on aura une quantité toute en x & dx, qui, lorsqu'elle pourra être intégrée par les règles précédentes, donnera, en y ajoutant une constante, l'expression de la surface de cette courbe, comptée depuis tel point qu'on voudra. Il ne s'agira plus que de déterminer la constante, ce que l'on fera en exprimant de quel point l'on prétend compter la surface; nous allons voir comment cela se fait.

Prenons, pour exemple, la parabole ordinaire, qui a pour équation $yy = px$. Nous aurons $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; donc ydx deviendra $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$; or l'intégrale de cette quantité (60) est $\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx}{\frac{1}{2}dx} + C$, ou

$\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; cette dernière expression est donc celle de la surface de la parabole ; en sorte que connoissant l'abscisse x, & le paramètre p, on auroit la valeur de l'espace APM, ou de l'espace $KPML$ compté depuis un point déterminé K, si la constante C étoit déterminée, c'est-à-dire, si cette intégrale exprimoit actuellement de quel point on compte.

Supposons donc que nous voulons compter les espaces depuis le point A ; alors on aura $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$. Pour savoir ce que doit valoir C, pour que cette équation ait lieu, il faut remarquer que lorsque x devient 0, l'espace APM est aussi zéro ; dans ce cas l'équation se réduit à $0 = 0 + C$; donc $C = 0$; donc pour que l'intégrale exprime les espaces comptés depuis le point A, il faut que la constante C soit zéro ; c'est-à-dire, qu'alors il n'y a point de constante à ajouter, & l'on a, en général, l'espace indéfini $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$.

Mais, si l'on vouloit compter les espaces depuis le point K, tel que $AK = b$ (b étant une quantité connue) ; alors on auroit $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; or ces espaces $KPML$ deviennent 0, lorsque AP ou x devient $= b$; on a donc alors $0 = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + C$; donc $C = -\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, & par conséquent $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$.

On voit par-là, à quoi sert la constante que l'on ajoute en intégrant, & comment l'état de la question, seul, peut la déterminer.

Remarquons que $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x$; or $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$; donc $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ ou $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x = \frac{2}{3}xy$;

donc puisque $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$ exprime l'espace *APM*, cet espace aura aussi pour expression $\frac{2}{3} xy$, c'est-à-dire, $\frac{2}{3}$ $AP \times PM$, ou les $\frac{2}{3}$ du rectangle *APMO*, quel que soit *AP*.

Pareillement $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \times b$; or, lorsque $x = AK = b$, l'équation $yy = px$ donne $yy = pb$, & par conséquent $y = p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire, $KL = p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$; donc $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$ ou $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \times b = \frac{2}{3} KL \times AK$; donc, puisque l'espace *KPML* a pour expression $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$, il aura aussi pour expression $\frac{2}{3} AP \times PM - \frac{2}{3} AK \times KL$, c'est-à-dire, $\frac{2}{3} APMO - \frac{2}{3} AKLI$.

La parabole est la seule des quatre sections coniques, qui soit quarrable.

Prenons pour second exemple, les paraboles de tous les genres, dont l'équation (30) est $y^{m+n} = a^m x^n$; nous aurons $y = \sqrt[m+n]{(a^m x^n)} = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$; donc $y\,dx = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} dx$, dont l'intégrale est $\frac{a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}+1}}{\frac{n}{m+n}+1} + C$, qui se réduit à .... $\frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}+1} + C$, qui est la même chose que $\frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} \times x + C$, ou (à cause que $y = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$.) se réduit à $\frac{m+n}{m+2n} xy + C$. En sorte que si l'on veut compter les espaces

APM depuis l'origine *A* des x (*fig.* 13), ce qui exige que l'intégrale soit zéro, quand *APM* est zéro, & par conséquent quand x est zéro, alors la constante C est zéro, & l'on a simplement $\frac{m+n}{m+2n} xy$; c'est-à-dire, que l'espace *APM* est toujours une portion déterminée du produit xy ou du rectangle *APMQ*; il en est une partie exprimée par la fraction $\frac{m+n}{m+2n}$, dont la valeur dépend de celles de m & de n; c'est-à-dire, du degré de la parabole. Ainsi toutes les paraboles, sont quarrables.

On trouvera, de même, que toutes les hyperboles rapportées à leurs asymptotes (excepté l'hyperbole ordinaire) sont quarrables. Mais comme dans la détermination de la constante, on trouve quelquefois une quantité infinie, il n'est pas inutile d'examiner ici ce qu'elle signifie. Soit donc $y^m = a^{m+n} x^{-n}$ l'équation de ces courbes, on aura $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{-n}{m}}$; donc $y\,dx = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{-n}{m}} dx$, dont l'intégrale est $\frac{a^{\frac{m+n}{m}} x^{1-\frac{n}{m}}}{1-\frac{n}{m}} + C$, ou $\frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} x^{1-\frac{n}{m}} + C$; quantité où il n'y a aucune difficulté pour déterminer la constante, lorsque m surpasse n. Mais lorsque m est plus petite que n, on trouve une quantité infinie pour constante, lorsqu'on veut compter les espaces depuis l'origine des x; & une quantité finie, quand on compte de tout autre point. Supposons, par exemple, $m = 1$ & $n = 2$; auquel cas l'équation est $y = a^3 x^{-2}$; la surface se réduit alors à $-a^3 x^{-1} + C$, ou $C - \frac{a^3}{x}$. Donc si l'on veut compter

les eſpaces depuis l'origine A des x, il faudra que $C - \frac{a^3}{x}$ ſoit zéro, lorſque $x = 0$; c'eſt-à-dire, que $C - \frac{a^3}{0} = 0$, & par conſequent $C = \frac{a^3}{0}$, c'eſt-à-dire, eſt infini. Au contraire, ſi on veut compter les eſpaces depuis le point K, tel que $AK = b$, on a $C - \frac{a^3}{b} = 0$, qui donne $C = \frac{a^3}{b}$. Voici ce que cela ſignifie.

La courbe qui a pour équation $y = a^3 x^{-2}$ ou $y = \frac{a^3}{x^2}$ s'étend à l'infini le long des aſymptotes AZ, AY (*fig.* 14); mais s'approche beaucoup plus près de l'aſymptote AZ que de l'aſymptote AY, ainſi qu'on peut le déduire de ſon équation; en ſorte que ſi l'on compte les eſpaces depuis l'aſymptote AY, ils ſont infinis, parce que l'eſpace compris entre cette aſymptote & la branche infinie BS, eſt infini. Ainſi, il n'eſt pas poſſible d'aſſigner les eſpaces $APMS$ comptés depuis l'aſymptote AY. Au contraire les eſpaces compris entre la branche BM & l'aſymptote AZ juſqu'à l'infini, ont une valeur finie, parce qu'après un intervalle aſſez court, la branche s'approche très-rapidement de ſon aſymptote, en ſorte que l'eſpace infiniment long $KLMOZ$ a pour expreſſion $\frac{a^3}{b}$, & $PMOZ = \frac{a^3}{x}$; & par conſéquent $KLMP = \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{x}$. D'où il ſuit que quoiqu'on ne puiſſe pas avoir les eſpaces comptés depuis AY, on peut néanmoins avoir les eſpaces $KLMP$ comptés depuis un point K pris ſi près qu'on le voudra de AY.

Prenons pour troiſième exemple, la courbe qui auroit pour

équation $y = \frac{aax - x^3}{aa}$, & que l'on reconnoîtra avoir la figure marquée (*fig.* 15), en donnant consécutivement à x des valeurs arbitraires, & une valeur déterminée à a.

On aura donc $ydx = \frac{aaxdx - x^3 dx}{aa}$, dont l'intégrale (60) est $\int ydx$ ou $APM = \frac{2aax^2 - x^4}{4aa} + C$; & si l'on veut compter les espaces APM depuis le point A origine des x, il faut que cette intégrale devienne o avec x, ce qui fait voir que la constante C est zéro. En sorte que l'espace indéfini APM est simplement $\frac{2aax^2 - x^4}{4aa}$. Et en général, si la valeur de y n'est composée, comme dans le cas présent, que de monomes, on aura toujours aisément la surface (60).

Prenons encore un exemple. Ce sera celui de la surface de la courbe, qui a pour équation $a^5yy = x^4(a^3 - x^3)$; cette équation donne $y = \pm \sqrt{\left(\frac{x^4(a^3 - x^3)}{a^5}\right)} = \pm \frac{x^2}{a^2\sqrt{a}} \sqrt{(a^3 - x^3)}$; donc (en ne prenant qu'une des valeurs de y), $ydx = \frac{x^2 dx}{a^2\sqrt{a}} \sqrt{(a^3 - x^3)} = \frac{x^2 dx}{a^2\sqrt{a}}(a^3 - x^3)^{\frac{1}{2}}$; or cette quantité est intégrable (66), parce que $x^2 dx$ est la différencielle de x^3, divisée par le nombre constant 3. Donc (66) on a $\int ydx = \frac{x^2 dx \cdot (a^3 - x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} a^2 \sqrt{a} \cdot - 3x^2 dx} + C = - \frac{2(a^3 - x^3)^{\frac{3}{2}}}{9a^2\sqrt{a}} + C$. A l'égard de la constante C, on la déterminera en décidant de quel point on veut compter la surface.

On peut encore trouver la surface des courbes en la décomposant en triangles, au lieu de trapèzes. Par exemple, on pourroit trouver la surface du segment ANQ (*fig.* 12), en le considérant comme composé d'une infinité de triangles infiniment petits, tels que AQq. Ce triangle auroit pour expression $\frac{Aq \times Qt}{2}$, en abaissant la perpendiculaire Qt, ou (ce qui revient au même) en décrivant du centre A & du rayon AQ l'arc infiniment petit Qt. Alors nommant AQ, t, & l'arc Qt, dx; on auroit $Aq = t + dt$, & par conséquent le triangle $AQq = \frac{t + dt}{2} dx = \frac{t dx}{2} + \frac{dt dx}{2}$, c'est-à dire, $= \frac{t dx}{2}$, en rejettant le terme $\frac{dt dx}{2}$ pour exprimer que dx & dt sont infiniment petits. Il ne s'agiroit plus que d'avoir l'équation entre x & t, pour pouvoir mettre au lieu de t sa valeur en x, & intégrer.

Application à la rectification des Lignes courbes.

73. Rectifier une ligne courbe, c'est déterminer sa longueur, ou assigner une ligne droite qui lui soit égale, ou égale à un arc proposé de cette courbe. Voici comment on y parvient quand cela est possible.

En considérant toujours la courbe AM (*fig.* 12), comme un polygone d'une infinité de côtés, le petit côté Mm peut être regardé comme la différencielle de l'arc AM, parce que $Mm = Am - AM = d\,(AM)$. Or en menant Mr parallèle à AP, on a $Mm = \sqrt{(Mr^2 + rm^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; il ne s'agit donc que d'intégrer $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Pour cet effet, on différenciera l'équation de la courbe, & en ayant tiré la valeur de dy exprimée en x & dx, ou celle de dx exprimée en y & dy, on la substituera dans $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ qui ne contiendra plus que des x & dx^2, ou des y & dy^2; on fera sortir dx^2 ou dy^2, hors du radical (*Alg.* 107), & l'on intégrera.

Pour en donner un exemple, prenons parmi les paraboles généralement exprimées par $y^{m+n} = a^m x^n$, celle qui a pour équation particulière $y^3 = ax^2$, nous en tirerons $x^2 = \frac{y^3}{a}$ & $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$; donc $dx = \frac{\frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} dy}{a^{\frac{1}{2}}}$, & $dx^2 = \frac{9}{4}\,\frac{y\,dy^2}{a}$; donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$

$$\sqrt{\left(dy^2 + \frac{9y\,dy^2}{4a}\right)} = dy\sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)}$$

(*Alg.* 107). Or, cette quantité s'intègre aisément (66) puisque l'exposant de y hors du binome, est moindre d'une unité que dans le binome. On aura donc......................

$$\int dy\sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)} \text{ ou } \int dy\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{dy\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9dy}{4a}} + C = \frac{8a}{27} \cdot \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$+ C$. A l'égard de la constante C, voici comment on la déterminera. Si c'est depuis le point A, origine des y, que nous voulons compter les arcs AM, il faudra que l'intégrale, ou la valeur de l'arc AM, devienne zéro en même temps que y. Or, lorsque $y = 0$, l'intégrale se réduit à $\frac{8a}{27}(1)^{\frac{3}{2}} + C$ ou $\frac{8a}{27} + C$; on a donc $\frac{8a}{27} + C = 0$; donc $C = -\frac{8a}{27}$. Donc, la longueur de l'arc quelconque AM compté depuis le sommet A, est $\frac{8a}{27}\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8a}{27}$.

Si l'on veut savoir quelles sont les autres paraboles que l'on peut rectifier, on le trouvera en cette manière; l'équation $y^{m+n} = a^m x^n$, qui appartient à ces courbes, donne $y = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$. Faisons, pour simplifier, $\frac{m}{m+n} = k$, & $\frac{n}{m+n} = l$; nous aurons $y = a^k x^l$; donc $dy = l a^k x^{l-1} dx$, & $dy^2 = l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2$; donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2)} = dx \sqrt{(1 + l^2 a^{2k} x^{2l-2})}$, quantité qui n'est intégrable dans cet état, que lorsque $2l - 2 = 1$. Mais si l'on change le signe de l'exposant de x sous le radical, on aura $x^{l-1} dx \sqrt{(x^{-2l+2} + l^2 a^{2k})}$, qui (68) est intégrable, si $l - 1$ augmenté d'une unité & divisé par $-2l + 2$, donne une nombre entier positif; c'est-à-dire, si $\frac{l}{-2l+2} = t$, t étant un nombre entier positif. De-là

on tire $l = \frac{2t}{2t+1}$; or $l = \frac{n}{m+n}$, donc $\frac{n}{m+n} = \frac{2t}{2t+1}$, d'où $m = \frac{n}{2t}$; ainsi les paraboles qui peuvent être rectifiées, sont celles qui sont comprises dans l'équation $y^{\frac{n.(2t+1)}{2t}} = a^{\frac{n}{2t}} x^n$, ou (en extrayant la racine n) $y^{\frac{2t+1}{2t}} = a^{\frac{1}{2t}} x$.

Application aux Surfaces courbes.

74. Nous nous bornerons aux surfaces des solides de révolution. On appelle ainsi les solides que l'on conçoit engendrés par le mouvement d'une courbe AM (*fig.* 16), qui tourneroit autour d'une ligne droite AP.

Il faut concevoir que tandis que la courbe AM tourne autour de AP, le petit côté Mm décrit une zone, ou portion de cône tronqué, qui est l'élément de la surface, & qui (*Géom.* 222) est égal au produit de Mm par la circonférence qui auroit pour rayon la perpendiculaire menée du milieu de Mm sur AP, ou (ce qui revient au même, puisque Mm est infiniment petit) par la circonférence qui auroit pour rayon PM. Or l'arc $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; & si l'on représente par $r : c$ le rapport du rayon à la circonférence d'un cercle, on aura $r : c :: y$ est à la circonférence

qui a pour rayon PM, laquelle sera $\frac{cy}{r}$; on a donc $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ pour l'élément de la surface des solides de révolution.

75. Pour appliquer ceci, supposons qu'on demande la surface de la sphère. Le cercle générateur AMB (*fig.* 17), a pour équation $yy = ax - xx$, en nommant AP, x; & PM, y. Donc $y = \sqrt{(ax - xx)}$, & $dy = \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$, donc $dy^2 = \frac{\frac{1}{4}aadx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax - xx}$; donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{\frac{1}{4}aadx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax - xx}\right)}$ $= \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$. Substituant donc dans la formule $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, pour y & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ leurs valeurs, on aura $\frac{c\sqrt{(ax - xx)}}{r} \cdot \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$ qui se réduit à $\frac{\frac{1}{2}acdx}{r}$, dont l'intégrale est $\frac{\frac{1}{2}acx}{r} + C$, ou simplement $\frac{\frac{1}{2}acx}{r}$, en comptant la surface depuis le point A. Or $\frac{\frac{1}{2}acx}{r}$, ou $\frac{\frac{1}{2}ac}{r} \cdot x$ exprime la surface du cylindre qui auroit pour base un grand cercle de la sphère, & x pour hauteur; ce qui s'accorde parfaitement avec ce qui a été démontré (*Géom.* 223).

76. Si l'on veut avoir la surface du paraboloïde, (c'est ainsi qu'on appelle le solide engendré par la révolution de la parabole AM (*fig.* 16), autour de son axe); on a pour équation $yy = px$; donc $x = \frac{yy}{p}$, $dx =$

$dx = \frac{2y\,dy}{p}$, & $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{pp}$; donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ $= \sqrt{\left(dy^2 + \frac{4y^2dy^2}{pp}\right)} = dy\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right)}$; donc $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, devient ici $\frac{cy\,dy}{r}\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right)}$, quantité qui est intégrable (66), & dont l'intégrale est

$$\frac{\frac{cy\,dy}{r}\left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{8y\,dy}{pp}} + C,$$

qui se réduit à $\frac{ppc}{12r}$. $\left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}} + C$. Or pour que cette quantité exprime la surface comptée depuis le sommet A, il faut qu'elle soit zéro, quand $y = 0$; mais, dans ce cas, elle devient $\frac{ppc}{12r}$ $(1)^{\frac{3}{2}} + C$, ou $\frac{ppc}{12r} + C$; on a donc $\frac{ppc}{12r} + C = 0$; c'est-à-dire, $C = -\frac{ppc}{12r}$; donc la surface du paraboloïde indéfini $AMLA$ est $\frac{ppc}{12r}\left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{ppc}{12r}$.

Application à la mesure des Solidités.

77. Pour mesurer la solidité des corps, on peut les imaginer composés de tranches infiniment minces & parallèles entr'elles; ou bien les imaginer composés d'une infinité de pyramides, dont les sommets se réunissent en un même point. Lorsqu-

qu'on se les présente comme composés de tranches infiniment minces, & parallèles entr'elles, la différence des deux surfaces opposées qui terminent chaque tranche, est infiniment petite, & par conséquent on doit l'omettre dans le calcul, si l'on veut exprimer que cètte tranche est infiniment mince. De-là il suit qu'on doit prendre pour expression de la solidité de cette tranche, le produit de l'une de ses deux bases opposées par sa hauteur infiniment petite. Par exemple, si je considère la pyramide *SABC* (*fig.* 18) comme composée de tranches infiniment minces, telles que *abcdef*; je puis prendre pour mesure de cette tranche, le produit de la surface *abc* ou de la surface *def* par l'épaisseur de cette tranche.

De même, si je considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe *AM*, autour de la droite *AP* (*fig.* 16), si je le considère comme composé de tranches parallèles entr'elles & infiniment minces, je dois prendre, pour mesure de chaque tranche, le produit de la surface du cercle qui a pour rayon *PM*, par l'épaisseur *Pp*.

Ce principe posé, voici comment on évaluera la solidité de tout le corps. On considérera chaque tranche comme étant la différencielle du solide, parce qu'en effet la tranche *MmlL* est $=$ $AmlA - AMLA = d(AMLA)$; & ayant

déterminé l'expreſſion algébrique de cette tranche, on l'intégrera.

Par exemple, s'il s'agit de la pyramide $SABC$; ſuppoſant que la ſurface ABC de ſa baſe, eſt égale à la quantité connue bb, & ſa hauteur $ST = h$, on repréſentera par x la diſtance St d'une tranche quelconque; ce qui donnera dx pour l'épaiſſeur de cette tranche. Quant à la ſurface abc, on la trouvera (*Géom.* 201) par cette proportion $\overline{ST}^2 : \overline{St}^2 :: ABC : abc$; c'eſt-à-dire, $hh : xx :: bb : abc = \frac{bbxx}{hh}$; ainſi la ſolidité de la tranche ſera $\frac{bbxxdx}{hh}$, dont l'intégrale eſt $\frac{bbx^3}{3hh} + C$, ou ſimplement $\frac{bbx^3}{3hh}$, ſi l'on compte la ſolidité depuis le ſommet S. Cette quantité qui exprime la ſolidité de la portion pyramidale quelconque $Sabc$, eſt la même choſe que $\frac{bbxx}{hh} \times \frac{x}{3}$, qui n'eſt autre choſe que $abc \times \frac{St}{3}$; ce qui s'accorde avec ce que nous avons démontré (*Géom.* 242).

78. Quant aux ſolides de révolution, on peut avoir d'une manière générale, l'expreſſion de la tranche élémentaire, ou différencielle. En effet, ſuppoſant que $r : c$ marque la rapport du rayon à la circonférence, on aura la circonférence qui a pour rayon PM (*fig.* 16) ou y, en faiſant cette proportion $r : c :: y : \frac{cy}{r}$; ſi l'on multiplie cette

valeur $\frac{cy}{r}$ de la circonférence qui a pour rayon PM, par $\frac{1}{2}y$ moitié du rayon, on a $\frac{cy^2}{2r}$ pour la surface, laquelle étant multipliée par l'épaisseur Pp ou dx, donne $\frac{cy^2dx}{2r}$ pour l'expression de l'élément de la solidité de tout solide de révolution. Pour en faire usage dans chaque cas particulier, il n'y aura autre chose à faire, que de mettre, au lieu de y, sa valeur en x tirée de l'équation de la courbe génératrice AM, & intégrer.

79. Prenons, pour exemple, le sphéroïde engendré par la révolution de l'ellipse autour de son grand axe (*fig.* 19). L'équation de l'ellipse est $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, en nommant AP, x; PM, y; & les axes AB & Dd, a & b. La formule $\frac{cy^2dx}{2r}$, devient donc $\frac{cbb}{2raa}dx \cdot (ax - xx)$, ou $\frac{cbb}{2raa} \cdot (axdx - x^2dx)$, dont l'intégrale est $\frac{cbb}{2raa} \times \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C$, ou simplement $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ si l'on compte la solidité depuis le point A.

Pour avoir le sphéroïde entier, on supposera $x = AB = a$, & l'on aura $\frac{cbb}{2raa} \times \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right)$ qui se réduit à $\frac{cabb}{12r}$, qui est la même chose que $\frac{cbb}{4r} \times \frac{1}{3}a$;

ou que $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$; or $\frac{cbb}{8r}$ exprime la surface du cercle qui a b ou Dd pour diamètre; & $\frac{cbb}{8r} \times a$, exprimeroit par conséquent, la solidité du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde; donc puisque la solidité de l'ellipsoïde est ici $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$, il faut en conclure que la solidité de l'ellipsoïde est les $\frac{2}{3}$ de celle du cylindre circonscrit. Et comme la sphère n'est autre chose qu'un ellipsoïde dont les deux axes sont égaux, la sphère est donc aussi les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit, ce qui s'accorde avec ce que nous avons démontré (*Géom.* 245).

80. Si l'on vouloit avoir la solidité comptée depuis un point déterminé K, tel que $AK = e$; alors on prendroit l'intégrale générale $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C$; & puisqu'on veut que la solidité commence au point K, il faut que cette intégrale devienne o en ce même point, c'est-à-dire, lorsque $x = e$; or dans ce cas, elle devient $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right) + C$; donc $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right) + C = 0$, & par conséquent $C = -\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right)$; ainsi la solidité, comptée depuis le point K, a pour expression $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{cbb}{2raa} \cdot \left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right)$. C'est-là l'expression d'une tranche de sphéroïde elliptique comprise entre deux plans parallèles, auxquels l'axe est perpendiculaire, & dont la distance est $= x - e$.

81. Prenons pour second exemple, le paraboloïde (*fig.* 16).

L'équation de la parabole eſt $yy = px$; ainſi la formule $\frac{cy^2 dx}{2r}$ devient $\frac{cpx dx}{2r}$, dont l'intégrale eſt $\frac{cpx^2}{4r} + C$, ou $\frac{cpx}{2r} \times \frac{x}{2} + C$, ou (en mettant pour px, ſa valeur yy) $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2} + C$. Si l'on veut le ſolide, à compter du point A; alors comme ce ſolide eſt zéro, quand x eſt zéro, la conſtante C doit être zéro, & la ſolidité ſe réduit à $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2}$; or $\frac{cyy}{2r}$. exprime la ſurface du cercle qui auroit PM pour rayon, ou la baſe du paraboloïde $AMLA$; donc le paraboloïde eſt la moitié du produit de ſa baſe, par ſa hauteur x; donc il eſt la moitié du cylindre de même baſe & de même hauteur.

Si l'on veut compter la ſolidité depuis un point K connu, & tel que $AK = e$; alors la ſolidité devant être zéro au point K, c'eſt-à-dire, quand $x = e$, l'intégrale générale doit être zéro dans ce même cas; c'eſt-à-dire, que $\frac{cpx^2}{4r} + C$, devenant $\frac{cpe^2}{4r} + C$, doit être o; donc $\frac{cpe^2}{4r} + C = 0$; & par conſéquent $C = -\frac{cpe^2}{4r}$; donc la ſolidité d'une tranche du paraboloïde, compriſe entre deux plans parallèles dont les diſtances au ſommet ſont x & e, eſt $\frac{cpx^2}{4r} - \frac{cpe^2}{4r}$. Ceci peut ſervir à toiſer l'excavation des mines.

On a trouvé, par pluſieurs expériences, que dans les terreins homogènes, & dont la ſurface MN (*fig.* 20) eſt horizontale, les parois de l'*entonnoir* ou de l'excavation faite par l'exploſion de la mine, ont la courbure d'un paraboloïde

MAN qui a pour foyer le centre *K* du fourneau, & dont la distance *KP* (qu'on appelle la *ligne de moindre résistance*) de ce foyer au plan de la base *MN* de l'entonnoir, est moitié du diamètre *MN* de cette base. D'après ces données, voici comment on peut calculer le solide *NOLM* que l'effort de la mine doit enlever.

Si on nomme a la ligne $KP = PM$, on a par la propriété de la parabole $\frac{aa}{a+e} = 4e$, e étant $= AK$; d'où l'on tire $e = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, donc $x = a + e = \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{2})$, & par conséquent $xx - ee = a^2\sqrt{2}$; or p étant $= 4e$, on aura $p(xx - ee) = 2a^3\sqrt{2}(-1 + \sqrt{2}) = 2a^3(2 - \sqrt{2})$, le solide cherché, qui est en général $\frac{cp}{4r}(x^2 - e^2)$, sera donc $\frac{c}{2r}a^3(2 - \sqrt{2}) = \frac{355}{113} \times a^3(2 - 1{,}4142135) = 1{,}8403012\, a^3$; c'est-à-dire, à peu près $\frac{46}{25}$ du cube de la ligne de moindre résistance.

Nous n'y comprenons point la partie *LAO* dont l'enfoncement est dû en grande partie à la compression que la poudre exerce contre le fond de l'entonnoir.

82. On peut prendre encore, pour exemple, l'hyperboloïde, ou le solide engendré par la révolution de l'hyperbole autour de l'un de ses axes. On peut prendre aussi l'ellipsoïde engendré par la révolution de l'ellipse autour de son petit axe, & que l'on appelle *Ellipsoïde aplati*; on nomme au contraire *Ellipsoïde alongé* celui qui est engendré par la révolution autour du grand axe. On

trouvera de même, que l'ellipſoïde aplati eſt les $\frac{2}{3}$ du cylindre qui lui ſeroit circonſcrit; c'eſt-à-dire, que a & b étant le grand & le petit axe de l'ellipſe génératrice, le ſphéroïde alongé a pour ſolidité $\frac{cabb}{12r}$; le ſphéroïde applati, a pour ſolidité $\frac{caab}{12r}$; ainſi le ſphéroïde alongé, eſt au ſphéroïde aplati $::\frac{cabb}{12r}:\frac{cabb}{12r}::b:a$, comme le petit axe eſt au grand axe.

En voilà aſſez pour les ſolides de révolution. Mais pour accoutumer les commençans à étendre l'uſage de ces méthodes, nous les appliquerons encore à un exemple.

83. Il s'agit de trouver la ſolidité d'un onglet cylindrique formé en coupant un cylindre par un plan oblique à ſa baſe, & que (pour plus de ſimplicité) nous ſuppoſerons paſſer par le centre; c'eſt le ſolide $ADBE$ qu'on voit repreſenté (*fig.* 21).

Si l'on conçoit ce ſolide coupé par des plans parallèles, infiniment près, & perpendiculaires à la baſe AEB (*fig.* 22), les ſections ſeront des triangles ſemblables dont les ſurfaces ſeront, par conſéquent, comme les quarrés de leurs côtés homologues. Ainſi nommant r le rayon CE de la baſe, h la hauteur DE, & y la baſe PM du triangle PMN, on aura $CED:PMN::rr$

$2yy$; or $CED = \frac{rh}{2}$; donc $PMN = \frac{rhyy}{2rr} = \frac{hyy}{2r}$; donc nommant AP, x, ce qui donne dx pour l'épaiſſeur Pp de la tranche compriſe entre deux plans voiſins, on aura $\frac{hyydx}{2r}$ pour cette tranche. Or y eſt l'ordonnée du cercle qui ſert de baſe, & l'on a par conſéquent $yy = 2rx - xx$. La tranche élémentaire devient donc $\frac{hdx \cdot (2rx - xx)}{2r}$, ou $\frac{h}{2r} \cdot (2rxdx - xxdx)$, dont l'intégrale, à compter du point A, eſt $\frac{h}{2r}$. $(rx^2 - \frac{x^3}{3})$. Donc pour avoir tout le ſolide, il n'y a qu'à ſuppoſer $x = 2r$, ce qui donne $\frac{h}{2r} \times (4r^3 - \frac{8r^3}{3})$, ou $\frac{2}{3}hr^2$ ou $\frac{hr}{2} \times \frac{4}{3}r$, ou $CED \times \frac{4}{3} AC$, ou enfin $CED \times \frac{2}{3} AB$; c'eſt-à-dire, les deux tiers du priſme qui auroit le triangle CED pour baſe, & le diamètre AB pour hauteur. Ceci peut ſervir dans un cas du Toiſé des fortifications.

De l'intégration des quantités qui renferment des ſinus & coſinus.

84. L'intégration des quantités qui renferment des ſinus & des coſinus, eſt entièrement fondée

sur le principe que nous avons donné (22) pour différencier ces quantités.

Nous avons vu que d (sin. z) $= dz$. cos. z. & que d (cos. z) $= - dz$ sin. z: donc réciproquement, l'intégrale de dz cos. z sera sin. z, ou plus généralement sin. $z + C$, qui a la même différencielle. De même l'intégrale de $- dz$ cos. z sera cos. $z + C$. C'est à ces deux cas qu'on peut rapporter l'intégration de toutes les autres quantités composées de sinus & de cosinus, en observant d'ailleurs les règles générales données jusqu'ici pour l'intégration des quantités : en voici des exemples.

Si l'on avoit dz cos. $3z$, on l'écriroit ainsi $\frac{3dz \text{ cos. } 3z}{3}$, & alors l'intégrale seroit $\frac{\text{sin. } 3z}{3} + C$. De même, l'intégrale de dz sin. $3z$, se trouveroit en écrivant ainsi $\frac{-3dz \text{ sin. } 3z}{-3}$; & alors l'intégrale est $\frac{\text{cos. } 3z}{-3} + C$.

En général, $\int dz$ sin. mz (m étant un nombre constant) se change en $\frac{\int -m dz \text{ sin. } mz}{-m}$, & devient $\frac{-\text{cos. } mz}{m} + C$.

Si l'on avoit (sin. z)$^n dz$ cos. z, on remarqueroit que cette quantité est la même chose que (sin. z)$^n d$ (sin. z); or en regardant sin. z comme une simple variable, on intègre par la règle fondamentale, & l'on a $\frac{(\text{sin. } z)^{n+1}}{n+1} + C$.

Si la différencielle proposée est (sin. mz)$^n dz$ cos. mz, on

écrira $\frac{(\text{sin. } mz)^n \, m\,dz \; \text{cos. } mz}{m}$ qui revient à...........

$\frac{(\text{sin. } mz)^n \, d\,(\text{sin. } mz)}{m}$ dont l'intégrale est $\frac{(\text{sin. } mz)^{n+1}}{m\,(n+1)}$.

Pareillement, pour avoir l'intégrale de $(\text{cos. } mz)^n \, dz \; \text{sin. } mz$, on écrira $\frac{(\text{cos. } mz)^n \, . \, -m\,dz \; \text{sin. } mz}{-m}$, qui a pour intégrale $\frac{(\text{cos. } mz)^{n+1}}{-m\,(n+1)} + C$.

Si l'on avoit à intégrer dz sin. pz cos. qz; alors on se rappelleroit que (*Géom.* 286) a & b étant deux angles quelconques, on a sin. $(a+b) =$ sin. a cos. $b +$ sin. b cos. a; sin. $(a-b) =$ sin. a cos. $b -$ sin. b cos. a; d'où l'on conclud sin. a cos. $b = \frac{1}{2}$ sin. $(a+b) + \frac{1}{2}$ sin $(a-b)$.

De même, puisque (*Géom.* 287) on a cos. $(a+b) =$ cos. a cos. $b -$ sin. a sin b, & cos. $(a-b) =$ cos. a cos. $b +$ sin. a sin. b, on aura cos. a cos. $b = \frac{1}{2}$ cos. $(a+b) + \frac{1}{2}$ cos. $(a-b)$ & sin. a sin. $b = \frac{1}{2}$ cos. $(a-b) - \frac{1}{2}$ cos. $(a+b)$.

D'après ces principes, on changeroit sin. pz cos. qz en $\frac{1}{2}$ sin. $(pz+qz) + \frac{1}{2}$ sin. $(pz-qz)$, ou $\frac{1}{2}$ sin. $(p+q)z + \frac{1}{2}$ sin. $(p-q)z$; ainsi l'on auroit à intégrer $\frac{1}{2}dz$ sin. $(p+q)z + \frac{1}{2}dz$ sin. $(p-q)z$ qui étant écrit ainsi...

$$\frac{1}{2}\frac{(p+q)\,dz \; \text{sin. } (p+q)\,z}{p+q} + \frac{1}{2}\frac{(p-q)\,dz \; \text{sin. } (p-q)\,z}{(p-q)},$$

a évidemment pour intégrale $\frac{-\frac{1}{2}\,\text{cos. } (p+q)\,z}{p+q} - \frac{\frac{1}{2}\,\text{cos. } (p-q)\,z}{p-q} + C$.

On intégrera de même dz sin. pz cos. qz sin. rz, &c. en convertissant ces produits en sinus ou cosinus de la somme & de la différence des arcs pz, qz, rz, &c. par les mêmes principes.

Si l'on avoit dz (sin. z)^3 ; on le changeroit en dz sin. z (sin. z)^2 ; or (sin. z)^2 ou sin. z × sin. z est, d'après le principe ci-dessus.......................................
$= \frac{1}{2}$ cos. $(z - z) - \frac{1}{2}$ cos. $(z + z) = \frac{1}{2}$ cos. $0 - \frac{1}{2}$ cos. $2z$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. $2z$, parce que cos. $0 = 1$. Donc sin. z (sin. z)$^2 = \frac{1}{2}$ sin. $z - \frac{1}{2}$ sin. z × cos. $2z$. Donc dz (sin. z)^3 $= \frac{1}{2} dz$ sin. $z - \frac{1}{2} dz$ sin. z cos. $2z$; on réduira donc sin. z cos. $2z$, ainsi qu'on vient de le faire pour sin. pz cos. qz, & l'intégration sera facile. On voit donc comment on intégreroit dz (sin. z)^n, n étant un nombre entier positif. On s'y prendroit d'une manière semblable pour dz (cos. z)^n. Donc on peut, par les mêmes principes que nous venons d'exposer, intégrer les quantités de cette forme dz (sin. pz)^m (cos. qz)^n (sin. rz)^s, &c. m, n, s, étant des nombres entiers positifs.

Enfin, ces principes, & ce que nous avons dit ci-dessus, sur l'intégration des quantités, mettent en état d'intégrer les différencielles affectées de sinus & de cosinus, lorsqu'elles ont une intégrale algébrique ; & lorsqu'il y entre des tangentes, on les ramène aux différencielles de sinus & cosinus, en observant que tang. $z = \frac{\text{sin. } z}{\text{cos. } z}$.

De la manière d'intégrer par approximation ; & quelques usages de cette Méthode.

85. Ceci ne peut regarder les différencielles monomes ; nous avons vu qu'elles s'intégroient toujours facilement. C'est donc pour les différencielles complexes qui échappent aux cas que nous avons examinés plus haut.

L'art d'intégrer par approximation, consiste à convertir la quantité proposée, en une suite de monomes dont la valeur aille continuellement en diminuant; chaque terme s'intègre alors aisément, & il suffit d'en prendre un certain nombre pour avoir une valeur suffisante de l'intégrale.

La règle que nous avons donnée (*Alg.* 128) pour élever une quantité à une puissance proposée, & qui s'applique également aux polynomes, est le moyen que nous emploierons pour intégrer aussi par approximation. En voici des exemples.

86. Proposons-nous de trouver la longueur d'un arc de cercle AM (*fig.* 17), par le moyen de son sinus verse AP.

Supposant l'arc Mm infiniment petit, si l'on mène Mr parallèle à AP, & le rayon CM; les triangles semblables CPM, Mrm, donneront $PM : CM :: Mr : Mm$. Or, nommant AP, x, le diamètre AB, a, ou 1, (pour plus de simplicité); on aura $Mr = dx$, $CM = \frac{1}{2}$, & $PM = \sqrt{(x - xx)}$. Donc $\sqrt{(x - xx)} : \frac{1}{2} :: dx : Mm$; donc $Mm = \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - xx)}}$, & par conséquent $AM = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - xx}}$. Cette quantité ne peut être intégrée par les règles que nous avons données ci-devant; c'est pourquoi je la change en $\int \frac{\frac{1}{2} dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 - x)}}$, puis en $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$ $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$. Je réduis $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$, en série (*Alg.* 128);

& je trouve, toute réduction faite.......................

$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \&c.$ donc $\int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\,(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\,(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \&c.) = \int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}dx + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}dx + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}dx + \&c. = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{16}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{5}{32}x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \&c. = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \&c.$ quantité à laquelle il n'y a point de constante à ajouter, parce que lorsque $x = 0$, elle devient zéro, ainsi que cela doit être puisqu'alors l'arc *AM* qu'elle exprime, est zéro.

On peut, à cause du multiplicateur commun $x^{\frac{1}{2}}$, donner à la série qui exprime l'arc *AM*, cette dernière forme...... $x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 = \&c.)$ Remarquons, maintenant, que le sinus verse x étant toujours plus petit que le diamètre 1, (excepté lorsqu'il s'agit de la demi-circonférence.) x est une fraction; que par conséquent les valeurs des termes de la série décroîtront d'autant plus, que le sinus verse de l'arc en question sera plus petit. Ainsi, si l'on vouloit, par exemple, la longueur de l'arc dont le sinus verse est la centième partie du diamètre, on auroit $x = \frac{1}{100}, = 0{,}01$, & par conséquent $x^{\frac{1}{2}} = 0{,}1$; on auroit donc pour la valeur de cet arc $0{,}1\,[1 + \frac{0{,}01}{6} + \frac{3\,(0{,}01)^2}{40} + \frac{5}{112}\cdot(0{,}01)^3]$, & comme le terme suivant de cette série seroit au moins cent fois plus petit que le dernier de ceux-ci, puisque chacun est plus de cent fois plus petit que celui qui le précède, en examinant quelle est la valeur du terme $\frac{5}{112}$

$(0{,}01)^3$, nous pourrons, en prenant le centième de cette valeur, juger du degré d'exactitude auquel nous aurons l'arc en nous en tenant à ces quatre premiers termes. Or $\frac{5}{112}$ $(0{,}01)^3$, revient à $\frac{5}{112} \cdot (0{,}000001) = \frac{0{,}000005}{112} =$ $0{,}0000000446$, dont la centième partie est $0{,}000000000446$; donc nous pouvons, en toute sûreté, évaluer chaque terme de notre série jusqu'à dix décimales, sans craindre que la valeur de l'arc qui en résultera, soit fautive d'une unité dans la neuvième. Ainsi, nous aurons $\frac{5}{112}(0{,}01)^3 = 0{,}0000000446$; $\frac{3}{40}(0{,}01)^2 = 0{,}0000075000$; $\frac{0{,}01}{6} = 0{,}0016666666$; donc la totalité de la série sera $0{,}1\ (1{,}0016742112)$, ou enfin $0{,}100167421$, en se bornant à neuf décimales; & l'on pourroit même en toute sûreté admettre la dixième.

Telle est la valeur de l'arc dont le sinus verse est la centième partie du rayon. Donc si l'on savoit combien de fois le nombre de degrés de cet arc est contenu dans 360^d, en multipliant cette longueur par ce nombre de fois, on auroit la longueur approchée de la circonférence; mais on ne connoît pas ce rapport.

Comme nous savons (*Géom.* 275) que le sinus de 30^d, est la moitié du rayon, & que connoissant le sinus d'un arc, on peut aisément avoir son sinus verse (*Géom.* 283), on pourroit calculer le sinus verse de 30^d, le substituer pour x dans la série ci-dessus, & alors multipliant le résultat par 12, qui est le nombre de fois que 30 degrés sont dans 360 degrés, on auroit la longueur approchée de la circon-

férence. Mais comme la série seroit peu convergente, ensorte qu'il faudroit en calculer un assez grand nombre de termes, pour avoir une valeur un peu approchée de la circonférence, nous allons enseigner un autre moyen qui nous servira de second exemple de la Méthode d'approximation.

Menons la tangente AN (*fig.* 23), la sécante CMN & la sécante infiniment voisine Cmn; du centre C & du rayon CN, décrivons l'arc infiniment petit Nr, que l'on peut regarder comme une perpendiculaire sur CN. Le petit triangle rectangle Nrn sera semblable au triangle rectangle CAn, parce qu'outre l'angle droit, ils ont un angle commun en n; il sera donc aussi semblable au triangle CAN qui diffère infiniment peu de CAn; on aura donc $CN : CA :: Nn : Nr$, d'où $Nr = \frac{CA \times Nn}{CN}$; or les secteurs semblables CNr, CMm, donnent $CN : CM$ ou $CA :: Nr$ ou $\frac{CA \times Nn}{CN} : Mm$; donc $Mm = \frac{CA^2 \times Nn}{CN^2}$. Nommons donc AN, x; le rayon CA, a; nous aurons $Nn = dx$; & $CN = \sqrt{(aa + xx)}$; donc la valeur de Mm deviendra $\frac{aadx}{aa + xx}$; c'est-à-dire, que $Mm = \frac{aadx}{aa + xx}$; donc $\int Mm$ ou $AM = \int \frac{aadx}{aa + xx}$. Cette quantité ne peut pas être intégrée exactement. Pour l'intégrer par approximation, il faut la mettre sous cette forme $\int aadx(aa + xx)^{-1}$; alors ayant trouvé (*Alg.* 128) que $(aa + xx)^{-1} = a^{-2}$........................ $(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}$ — &c.), on aura $\int aadx\,(aa + xx)^{-1}$................................ $= \int dx$

$$= \int dx \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \&c.\right)$$

$$= \int \left(dx - \frac{x^2\,dx}{a^2} + \frac{x^4\,dx}{a^4} - \frac{x^6\,dx}{a^6} + \frac{x^8\,dx}{a^8} - \&c.\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} - \&c. \ldots\ldots\ldots$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} - \frac{x^6}{7a^6} + \frac{x^8}{9a^8} - \&c.\right)$$

Il reste donc à savoir si nous connoissons quelque arc qui étant contenu, un nombre connu de fois, dans la circonférence, ait une tangente connue. Or l'arc de 45 degrés est dans ce cas, il est huit fois dans la circonférence, & sa tangente est égale au rayon (*Géom.* 276); donc supposant $x = a$, nous aurons pour la longueur de l'arc de 45 degrés, la valeur de cette série...
$a\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c.\right)$. Mais comme les termes de cette série décroissent encore fort lentement, il faut voir si nous ne pourrions pas décomposer l'arc de 45 degrés en deux autres arcs dont les tangentes fussent connues. Peu importe que le nombre de degrés de ces arcs soit connu; pourvu qu'ils fassent 45 degrés, quand nous aurons calculé leurs longueurs par le moyen de leurs tangentes, en ajoutant ces longueurs, nous aurons celle de l'arc de 45 degrés. Comme ces arcs seront plus petits que 45 degrés, leurs tangentes seront plus petites que le rayon, & par conséquent la série sera plus convergente, & plus facile à calculer.

Or ce que nous avons dit (*Géom.* 282) nous fournit le moyen de trouver deux pareils arcs. En effet, nous avons vu que a & b étant deux arcs quelconques, on avoit tang. $(a+b)$
$$= \frac{\text{sin.}\,(a+b)}{\text{cos.}\,(a+b)} = \frac{\text{sin.}\,a\,\text{cos.}\,b + \text{sin.}\,b\,\text{cos.}\,a}{\text{cos.}\,a\,\text{cos.}\,b - \text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,a}$$
(*Géom.* 286 & 287); donc divisant haut & bas, par cos. a

cos. b, on aura tang. $(a+b) = \dfrac{\dfrac{\text{sin. } a}{\text{cos. } a} + \dfrac{\text{sin. } b}{\text{cos. } b}}{1 - \dfrac{\text{sin. } a \text{ sin. } b}{\text{cos. } a \text{ cos. } b}}$,

c'est-à-dire, tang. $(a+b) = \dfrac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}$. Donc si nous supposons $a+b = 45^d$, auquel cas tang. $(a+b) = 1$, nous aurons $\dfrac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b} = 1$, équation d'où, par les règles ordinaires, on tire........... tang. $b = \dfrac{1 - \text{tang. } a}{1 + \text{tang. } a}$. Prenons donc tang. $a = \frac{1}{2}$; alors nous aurons tang. $b = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Nous n'avons donc qu'à calculer, par le moyen de la série ci-dessus, la longueur de l'arc dont la tangente x est $\dfrac{a}{2}$ ou la moitié du rayon, & la longueur de l'arc dont la tangente x est $\dfrac{a}{3}$; ces deux longueurs réunies formeront celle de l'arc de 45 degrés. Or en mettant pour x, $\dfrac{a}{2}$, & ensuite $\dfrac{a}{3}$, on a..................................

$$\frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^4} - \frac{1}{7.2^6} + \frac{1}{9.2^8} - \frac{1}{11.2^{10}} + \frac{1}{13.2^{12}} \text{ \&c.}\right)$$

$$\& \ \frac{a}{3}\left(1 - \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^4} - \frac{1}{7.3^6} + \frac{1}{9.3^8} - \frac{1}{11.3^{10}} + \frac{1}{13.3^{12}} \text{ \&c.}\right)$$

Si l'on veut avoir les valeurs de chacun de ces arcs, exprimées exactement jusqu'à la neuvième décimale, il faut calculer les quinze premiers termes de la première, & les dix premiers termes seulement de la seconde. Or ce calcul est fort aisé à faire, en observant que dans la première, on peut cal-

culer les termes consécutifs en formant d'abord une série, dont chaque terme soit égal au précédent multiplié par $\frac{1}{2^2}$, c'est-à-dire, soit le $\frac{1}{4}$ du précédent; on multiplie ensuite cette série, terme à terme, par la série 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, &c. enfin réunissant les termes de numéro pair entr'eux, & ceux de numéro impair, aussi entr'eux, on retranchera de la somme des derniers, la somme des premiers, & on multipliera le reste par $\frac{a}{2}$. Pareillement le calcul de la seconde, se réduit à former une série, dont chaque terme soit formé du précédent multiplié par $\frac{1}{3^2}$ ou par $\frac{1}{9}$, c'est-à-dire, soit la neuvième partie du précédent; on multiplie ensuite cette série, terme à terme, par la série 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$; &c. & on opère ensuite comme pour la première, excepté qu'on multipliera le résultat par $\frac{a}{3}$ au lieu de $\frac{a}{4}$. Si l'on exécute cette opération en portant l'approximation jusqu'à dix décimales, on aura pour la première série $\frac{a}{2}$(0,9272952180), ou a (0,4636476090); & pour la seconde, $\frac{a}{3}$ (0,9652516632), ou a (0,3217505544); donc l'arc de 45 degrés, qui est la somme de ces deux-là, sera a (0,7853981634). Prenant donc le quadruple, pour avoir la demi-circonférence, on aura a (3,1415926536); donc le rayon est à la demi-circonférence, (ou le diamètre est à la circonférence) :: a : a (3,1415926536) :: 1 : 3,1415926536, rapport qui ne diffère pas d'une demi-unité décimale du dixième ordre, de celui que nous avons donné (*Géom.* 146), & que l'on pourroit, très-facilement, trouver encore avec une beaucoup plus grande précision.

87. Pour troisième exemple d'approximation, nous nous proposerons de trouver le logarithme d'un nombre quelconque. Mais, avant tout, il faut se rappeller ce que nous avons déja dit ailleurs (27); savoir que les logarithmes dont il s'agit ici, ne sont pas ceux qu'on trouve dans les tables ordinaires. Mais ceux-là étant calculés, il est aisé d'en conclure les derniers, comme nous le verrons immédiatement après avoir enseigné à calculer les premiers.

J'imagine le nombre proposé, décomposé en deux parties, & représenté par $a + x$; a étant la plus grande partie. Selon ce que nous avons dit (27), on aura d log. $(a+x) = \frac{dx}{a+x}$, quantité qui ne peut être intégrée algébriquement. Il faut donc la réduire en série, & pour cet effet, la mettre sous cette forme .... $dx\,(a+x)^{-1}$. Or (*Alg.* 128) on a $(a+x)^{-1} = a^{-1}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3}, \text{\&c.}\right) = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4}$; donc, $dl\,(a+x) = dx\,(a+x)^{-1} = \frac{dx}{a} - \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{x^2\,dx}{a^3} - \frac{x^3\,dx}{a^4}$ &c. donc en intégrant, on a ....

$$l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{\&c.} + C.$$

Pour déterminer la constance C, je remarque que cette équation devant avoir toujours lieu, quel que soit x, doit aussi avoir lieu lorsque $x = 0$; or, dans ce dernier cas, elle

se réduit à $l\,a = C$; donc $C = l\,a$; donc............

$$l\,(a + x) = l\,a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}, \text{ \&c.}$$

Connoissant donc le logarithme d'un seul nombre, on peut par cette série, calculer le logarithme de tout autre nombre. Par exemple, si l'on suppose $a = 10$, & $a + x = 11$, on aura $x = 1$, & par conséquent $\frac{x}{a} = \frac{1}{10}$; d'où l'on trouvera $l\,11 = l\,10 + 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3}$ &c. qui fait connoître ce qu'on doit ajouter au logarithme de 10, pour avoir celui de 11.

Mais comme la série générale que nous venons de trouver, n'est souvent pas assez convergente, voici une autre manière de s'y prendre. Proposons-nous de trouver le logarithme d'une fraction dont le numérateur soit plus grand que le dénominateur; nous verrons, dans peu, qu'on peut toujours réduire à cela, la recherche de tout logarithme.

Représentons par a la somme du numérateur & du dénominateur de cette fraction, & par x leur différence; alors (*Géom.* 305), nous aurons $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$ pour le numérateur, & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$ pour le dénominateur; & par conséquent $\frac{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x}$ pour la fraction, ou (en supprimant le facteur commun $\frac{1}{2}$) $\frac{a + x}{a - x}$ sera cette fraction, & par conséquent $l\,\frac{a + x}{a - x}$, ou $l\,(a + x) - l\,(a - x)$ représentera son logarithme. Différencions maintenant, en regardant a comme

constante, & x seule comme variable *; nous aurons (27) $\frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$ qui se réduit à $\frac{2adx}{aa-xx}$, ou $2adx(aa-xx)^{-1}$; réduisons donc $(aa-xx)^{-1}$ en série; & (*Alg.* 128) nous aurons $(aa-xx)^{-1} = a^{-2}(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \&c.)$; donc $2adx(aa-xx)^{-1} = 2a^{-1}dx(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \&c.) = 2(\frac{dx}{a} + \frac{x^2dx}{a^3} + \frac{x^4dx}{a^5} + \frac{x^6dx}{a^7} + \frac{x^8dx}{a^9} + \&c.)$ Donc $\int \frac{2adx}{aa-xx}$, ou $l\frac{a+x}{a-x} = 2(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \frac{x^9}{9a^9} + \&c.) + C$. A l'égard de la constante C, nous déterminerons sa valeur comme ci-dessus, en examinant ce que devient l'équation, quand $x = 0$. Or alors elle se réduit à $l\frac{a}{a} = C$; donc $C = l\frac{a}{a} = l\,1 = 0$; on a donc tout simplement $l\frac{a+x}{a-x} = 2(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \&c.)$

* Quoique cette fraction doive représenter toute fraction proposée, cela n'empêche pas qu'on ne puisse regarder la somme a du numérateur & du dénominateur, comme constante; parce qu'il n'y a pas de fraction que l'on ne puisse préparer de manière à rendre la somme du numérateur & du dénominateur égale à tel nombre qu'on voudra. Par exemple, pour amener la fraction $\frac{3}{5}$ à avoir 12 pour la somme du numérateur & du dénominateur, il suffit, ayant multiplié les deux termes par un même nombre n, ce qui donne $\frac{3n}{5n}$, de supposer $3n + 5n$ ou $8n = 12$; d'où l'on tire $n = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$; donc $\frac{3}{5} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}$ dont la somme du numérateur & du dénominateur est, en effet, 12.

où l'on voit que chaque terme se forme du précédent, en multipliant celui-ci constamment par le quarré de $\frac{x}{a}$ ou du premier terme ; puis on prend le premier, le $\frac{1}{3}$ du second, le $\frac{1}{5}$ du troisième, &c. & l'on double la somme.

Appliquons à quelques exemples. Cherchons, par exemple, le logarithme de 2. Pour cet effet, nous chercherons celui de la fraction $\frac{2}{1}$; nous aurons donc $a = 3$, & $x = 1$; donc $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$, & $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}$. Chaque terme sera donc très-facile à former, puisqu'il ne s'agit que de prendre la $\frac{1}{9}$ partie du terme précédent, pour avoir la suite $\frac{x}{a}$, $\frac{x^3}{a^3}$, $\frac{x^5}{a^5}$, &c. ainsi nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{a} &= 0{,}333333333\\
\frac{x^3}{a^3} &= 0{,}037037037\\
\frac{x^5}{a^5} &= 0{,}004115226\\
\frac{x^7}{a^7} &= 0{,}000457247\\
\frac{x^9}{a^9} &= 0{,}000050805\\
\frac{x^{11}}{a^{11}} &= 0{,}000005645\\
\frac{x^{13}}{a^{13}} &= 0{,}000000627\\
\frac{x^{15}}{a^{15}} &= 0{,}000000069
\end{aligned}\right\}\ \text{donc}\ \left\{\begin{aligned}
\frac{x}{a} &= 0{,}333333333\\
\frac{x^3}{3a^3} &= 0{,}012345679\\
\frac{x^5}{5a^5} &= 0{,}000823045\\
\frac{x^7}{7a^7} &= 0{,}000065321\\
\frac{x^9}{9a^9} &= 0{,}000005645\\
\frac{x^{11}}{11a^{11}} &= 0{,}000000513\\
\frac{x^{13}}{13a^{13}} &= 0{,}000000048\\
\frac{x^{15}}{15a^{15}} &= 0{,}000000004
\end{aligned}\right.$$

donc la somme est....0,346573588 ; & le double, qui doit être log. 2, est = 0,693147176, qui, en se bornant à huit

décimales, (car pour répondre de la neuvième, il auroit fallu pousser l'approximation plus loin) est 0,69314718.

Puisque 4 est le quarré de 2, & que 8 en est le cube, le double de ce logarithme sera donc celui de 4; & le triple de ce même premier logarithme sera celui de 8.

Pour avoir celui de 3, on peut calculer de même, le logarithme de la fraction $\frac{4}{3}$, lequel étant retranché de celui de 4, donnera celui de 3; puisque 3 est 4 divisé par $\frac{4}{3}$, donc $l\,3 = l\,4 - l\,\frac{4}{3}$; mais on l'aura plus facilement, en calculant le logarithme de la fraction $\frac{8}{9}$, & le retranchant du logarithme de 8 que l'on connoît à présent; le reste sera le logarithme de 9, dont la moitié sera celui de 3. Ajoutant celui de 3 à celui de 2, on aura le logarithme de 6. Pour avoir celui de 5, on calculera d'abord celui de 10 en calculant celui de $\frac{10}{8}$, qui étant ajouté au logarithme de 8, donnera celui de 10. Retranchant, de ce dernier, le logarithme de 2, on aura celui de 5.

On voit par-là, ce qu'il y a à faire pour calculer tout autre logarithme. Mais il faut remarquer, que le calcul devient de plus en plus court, à mesure que le nombre devient plus grand, ensorte que dès qu'on a les logarithmes jusqu'à 10 seulement, on peut calculer les autres jusqu'à 100, sans employer plus de trois termes de la série, lorsqu'on se borne à huit décimales; & lorsqu'on a passé le nombre 100, les deux premiers termes suffisent jusqu'à mille, & par de-là, le premier terme suffit.

88. Pour savoir, maintenant, comment on ramene ces logarithmes; à ceux des tables ordinaires, il nous faut préalablement avoir le logarithme

de 10. Or, si l'on calcule le logarithme de $\frac{10}{8}$, par la formule précédente, on trouvera log. $\frac{10}{8}$, $= 0,22314355$; ajoutant à celui-ci, celui de 8 que l'on a en triplant celui de 2 qu'on a eu ci-dessus, on a $l\ 10 = 2,30258509$.

Cela posé, rappellons-nous que l'équation $dx = \frac{dy}{y}$ sur laquelle (27) est fondé le calcul actuel des logarithmes, ne convient qu'au système de logarithmes où l'on suppose le module $= 1$: mais que l'équation qui convient à tous les systèmes possibles de logarithmes, est $dx = \frac{mady}{y}$; & celle qui convient à tous les systèmes de logarithmes où l'on suppose que le premier terme a de la progression géométrique fondamentale est 1, est $dx = \frac{mdy}{y}$. La première, savoir $dx = \frac{dy}{y}$, donne, en intégrant, $x = ly$; & la seconde, savoir $dx = \frac{mdy}{y}$ donne $x = mly$, qui fait voir, puisque x représente le logarithme, que pour ramener les logarithmes que donne immédiatement le calcul, à ceux d'un autre système dont le module est m, il faut multiplier ceux-là par le module m. Or le logarithme de 10 dans les tables ordinaires est 1; & nous venons de voir que le

logarithme de 10 tel que le calcul le donne immédiatement, eſt 2,30258509; on a donc $m \times 2{,}30258509 = 1$; donc le module m des tables ordinaires, eſt $\frac{1}{2{,}30258509}$ qui ſe réduit (en faiſant la diviſion) à 0,43429448.

Donc, *pour ramener aux logarithmes des tables, les logarithmes donnés immédiatement par le calcul, il faut multiplier ceux-ci par* 0,43429448. Et réciproquement, *pour ramener les logarithmes des tables, à ceux que donneroit immédiatement le calcul, il faut diviſer ceux-là par* 0,43429448, ou (*ce qui eſt plus commode, & ce qui revient au même*) *les multiplier par* 2,30258509.

Ainſi, ſi l'on multiplie 0,69314718 que nous avons trouvé ci-deſſus, pour le logarithme de 2; ſi on le multiplie, dis-je, par 0,43429448, on trouve 0,3010300 pour le logarithme de 2, tel qu'il eſt en effet dans les tables ordinaires.

89. Lorſqu'on veut revenir, du logarithme, au nombre même, voici comment on doit s'y prendre

Nous avons vu ci-deſſus, qu'en repréſentant un nombre quelconque par $a + x$, on avoit.........................

$$l\,(a + x) = l\,a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c.$$

donc $l\,(a + x) - l\,a$, ou $l\,\frac{a+x}{a} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}$ &c. a étant un nombre arbitraire, mais tel que son logarithme diffère peu de celui qui est donné, & qui est supposé appartenir à $a + x$. Faisons, pour plus de simplicité, $l\frac{a+x}{a} = z$, & nous aurons $z = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}$ &c. il s'agit donc d'avoir la valeur de $\frac{x}{a}$ en z.

Supposons que cette valeur puisse être exprimée par $\frac{x}{a} = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ &c, A, B, C, &c. étant des coëfficiens constans qu'il s'agit de déterminer. On aura donc... $z = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ &c.

$$- \frac{A^2}{2}z^2 - \frac{2AB}{2}z^3 - \frac{BB}{2}z^4$$
$$+ \frac{A^3}{3}z^3 - \frac{2AC}{2}z^4$$
$$+ \frac{3A^2B}{3}z^4$$
$$- \frac{A^4}{4}z^4$$

Or pour que cette équation ait lieu, quel que soit z, il faut 1° que $A = 1$; 2° que la somme des termes qui multiplient chaque puissance de z dans les autres colonnes, soit zéro. On a donc $B - \frac{A^2}{2} = 0$, $C - AB + \frac{A^3}{3} = 0$, $D - \frac{BB}{2} - AC + A^2B - \frac{A^4}{4} = 0$; d'où l'on tire $B = \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$, $C = \frac{1}{6} = \frac{1}{1.2.3}$; $D = \frac{1}{24}$

$= \frac{1}{1.2.3.4}$; & si l'on supposoit un plus grand nombre de termes, tels que Ez^5, Fz^6, &c. dans la série, on trouveroit de même, $E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$, $F = \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$, &c. on a donc $\frac{x}{a} = z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} +$ &c. Donc $1 + \frac{x}{a}$, ou $\frac{a+x}{a} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} +$ &c.

Pour faire usage de cette formule, on retranchera du logarithme donné (qui est celui de $a + x$), le logarithme connu le plus approchant, dont on prendra le nombre correspondant pour a. Alors on aura $l\frac{a+x}{a}$, ou z, que l'on substituera dans la formule précédente ; le résultat sera la valeur de $\frac{a+x}{a}$; d'où il sera facile de conclure $a + x$, puisque a sera connu.

Si l'on veut savoir quel est le nombre dont le logarithme est 1, dans le système de logarithmes dont il s'agit ici, il faut supposer $l\frac{a+x}{a}$, ou $z = 1$, & l'on aura $\frac{a+x}{a} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} +$ &c. que l'on trouvera $= 2,7182818$, en se bornant à sept décimales.

Le nombre dont le logarithme est 1, se rencontre fréquem-

ment dans les calculs ; nous aurons occaſion de le voir par la ſuite ; & c'eſt pour cette raiſon que nous venons de donner la méthode de le calculer.

Comme il s'agit ici des logarithmes qui ont 1 pour module, ſi le logarithme donné étoit de la nature de ceux des tables ordinaires, il faudroit commencer par le réduire, ainſi que celui que l'on prendroit pour logarithme de a, (ou ſeulement réduire leur différence) aux logarithmes actuels ; ce que l'on feroit comme il a été enſeigné (88).

90. On peut avoir une autre expreſſion d'un nombre par le moyen de ſon logarithme ; comme elle eſt d'un aſſez grand uſage, nous la ferons connoître ici.

Soit x ce nombre, & ſoit $lx = z$. Si l'on multiplie le ſecond membre de cette équation, par e ; e étant le nombre dont le logarithme eſt 1, on aura $lx = zle$, ce qui ne change rien, puiſque $le = 1$. Or l'équation $lx = zle$, ſe change, par la nature des logarithmes, en $lx = le^z$; d'où l'on tire $x = e^z$; puiſque les logarithmes étant égaux, les quantités auxquelles ils appartiennent, doivent être égales.

Selon ce que nous venons de voir (89), ſi l'on a $lx = z$, on a $x = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} +$ &c. Puis donc qu'on a, en même-temps, $x = e^z$, on aura $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} +$ &c.

Remarque.

91. La méthode que nous venons d'employer pour conclure la valeur de x, de l'équation $z = \frac{x}{a}$ — &c. s'appelle *Méthode inverse* des séries ; elle consiste, comme l'on voit, à supposer la variable dont on veut avoir la valeur, exprimée par une série où l'autre variable ait des exposans en progression arithmétique, & où chaque terme ait un coëfficient constant indéterminé.

Si l'on avoit plusieurs termes en x & en z dans la même équation, mais que x & z ne fussent pas multipliés entr'eux, on détermineroit la série des exposans, en faisant l'exposant du prémier terme de la série supposée, égal au plus petit exposant de la même variable dans l'équation ; & on prendroit, pour différence commune des exposans de la même série, le plus grand commun diviseur des exposans de cette même variable dans l'équation.

Par exemple, si j'avois $z^{\frac{2}{3}} + 3z = 2x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{5}{7}x^3$ + &c. je ferois $x = Az^{\frac{2}{3}} + Bz + Cz^{\frac{4}{3}} + Dz^{\frac{5}{3}} + Ez^2$ + &c. parce que le plus petit exposant de z, est $\frac{2}{3}$; & que le plus grand commun diviseur des exposans $\frac{2}{3}$ & 1, de z, est $\frac{1}{3}$.

Mais si les x & les z étoient multipliés entr'eux,

alors il faudroit suivre une méthode dont le détail n'est pas trop de notre objet ; mais que l'on peut voir dans les ouvrages de Newton & dans l'*Analyse des lignes courbes* de Cramer.

Usages des Approximations précédentes, pour l'intégration des diverses quantités.

92. Comme on a des tables toutes calculées, des différentes parties du cercle, ainsi que des logarithmes, lorsqu'on aura à intégrer quelque différencielle qui pourra se rapporter au cercle, ou aux logarithmes, il sera inutile désormais de réduire ces differencielles en séries. Ce qu'il y a de plus utile à faire actuellement sur cette matière, est de faire connoître celles de ces différencielles que l'on rencontre le plus fréquemment, & de faire voir comment on détermine les arcs de cercle, ou les logarithmes qui en sont l'intégrale. En voici des exemples.

93. Nous avons vu (86) que $\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ exprimoit l'élément d'un arc de cercle *AM* (*fig.* 17) dont *a* seroit le diamètre, & *x* l'abscisse; ensorte que l'intégrale de cette quantité ou $\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ a pour expression l'arc *AM*. Supposant donc que l'on demande la valeur de cette intégrale pour une valeur déterminée de *x*; alors de *CA* ou de $\frac{1}{2}a$,

on retranchera la valeur connue de x, ou AP, & l'on aura CP. Dans le triangle rectangle CPM, on connoîtra donc l'angle droit, l'hypothénuse $CM = \frac{1}{2}a$, & le côté CP; on pourra donc calculer l'angle ACM; or connoissant l'angle ACM, ou le nombre de degrés de l'arc AM, & son rayon CM, il est facile de calculer la longueur de cet arc (*Géom.* 149).

94. Si l'on avoit $\frac{h\,dx}{\sqrt{(gkx - pxx)}}$, h, g, p & k étant des quantités connues, on rendroit cette différencielle, semblable à la précédente, en divisant d'abord haut & bas, par $\sqrt{p}$, ce qui donneroit $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}\,dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x - xx)}}$ ou $\frac{h}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x - xx)}}$; or si l'on avoit ici, pour multiplicateur de dx, la moitié de la quantité $\frac{gk}{p}$ qui multiplie x dans le radical, alors cette différencielle seroit semblable à celle de l'*article précédent*; donnons-lui donc cette condition, en multipliant & divisant en même-temps par $\frac{1}{2} \cdot \frac{gk}{p}$ ou $\frac{gk}{2p}$; nous aurons $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}}{\frac{gk}{2p}} \times \frac{\frac{gk}{2p}\,dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x - xx)}}$ ou $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}} \cdot \frac{\frac{gk}{2p}\,dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x - xx)}}$. Dans cet état, on voit que l'intégrale de notre différencielle est un arc de cercle dont le diamètre est $\frac{gk}{p}$, & l'abscisse x;

est;

est, dis-je, cet arc multiplié par $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$; elle est donc facile à assigner, par ce qui vient d'être dit.

95. Si au lieu de compter les abscisses depuis le point A, nous les eussions comptées depuis le centre C, en nommant b le rayon CA, & x l'abscisse CP; nous aurions eu $\frac{-bdx}{\sqrt{(bb-xx)}}$ pour l'élément de l'arc AM; ce que l'on trouve aisément en comparant les triangles semblables CPM, Mrm, & se rappellant que $PM = \sqrt{(bb-xx)}$, & que, puisque l'arc AM diminue à mesure que CP ou x augmente, sa différencielle doit être négative. Ainsi quand on aura une différencielle telle que $\frac{hdx}{\sqrt{(gh-pxx)}}$, on la changera comme ci-dessus, en $\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(\frac{gh}{h}-xx)}}$; or $\frac{gh}{p}$ représentant ici, bb; la quantité $-b$ qu'on doit avoir dans le numérateur, est $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$; je multiplie donc & je divise en même temps, par $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$, & j'ai $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \cdot \frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}}\,dx}{\sqrt{(\frac{gh}{p}-xx)}}$. Donc en supposant que $CA = \frac{gh}{p}$, & CP, x, on aura $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM$, pour l'intégrale, ou plus généra-

lement $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM + C$, ou $\frac{-k}{\sqrt{gh}} \times AM + C$.

A l'égard de la conſtante C, elle ſe détermine par les conditions de la queſtion particulière qui aura conduit à la différencielle dont il s'agit ; & l'arc AM ſe détermine comme nous venons de le dire (93) ; c'eſt-à-dire, par le calcul du triangle CPM, &c.

96. Nous avons vu (86) que $\frac{aadx}{aa + xx}$ exprimoit un arc de cercle dont a eſt le rayon, & x la tangente ; arc que l'on peut déterminer aiſément pour une valeur déterminée de x, en calculant l'angle ACN du triangle rectangle ACN (*fig.* 23), puis la longueur de l'arc AM par le moyen du nombre des degrés de l'angle ACN & du rayon a.

Si donc on avoit $\frac{kdx}{gb^2 + hxx}$, on diviſeroit, haut & bas, par h ; ce qui donneroit $\frac{k}{h} \cdot \frac{dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$; puis multipliant haut & bas, par $\frac{gb^2}{h}$, on auroit $\frac{\frac{k}{h}}{\frac{gb^2}{h}} \times \frac{\frac{gb^2}{h}dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$ ou $\frac{k}{gb^2} \times \frac{\frac{gb^2}{h}dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$; on auroit donc l'intégrale, en calculant la longueur de l'arc qui a x pour tangente, & $\sqrt{(\frac{gb^2}{h})}$ pour rayon, & la multipliant par $\frac{k}{gb^2}$.

97. Ces trois différencielles s'intègrent donc par les arcs de cercle. En voici qui s'intègrent par le moyen de la surface du cercle.

L'élément du demi-segment *APM* (*fig.* 17) est $dx\sqrt{(ax-xx)}$ en nommant *AP*, *x*; puisque $y=\sqrt{(ax-xx)}$, & par conséquent ydx ou $PpmM = dx\sqrt{(ax-xx)}$; donc toute différencielle qui aura cette forme, ou qui pourra y être ramenée par des préparations semblables à celles que nous venons d'indiquer, s'intégrera par le moyen d'un demi-segment de cercle dont l'abscisse est *x* & le diamètre *a*; segment qui est facile à déterminer, tant par ce qui précède, que par ce qui a été dit (*Géom.* 149).

98. Par exemple, si l'on veut avoir la surface du demi-segment elliptique *APM* (*fig.* 24), on aura $y=\frac{b}{a}\sqrt{(ax-xx)}$; donc ydx ou $d(APM) = \frac{bdx}{a}\cdot\sqrt{(ax-xx)}$: or $dx\sqrt{(ax-xx)}$ exprime l'élément du demi-segment circulaire *APM'*, en supposant qu'on ait décrit un cercle sur *AB*, comme diamètre; on a donc $d(APM)=\frac{b}{a}d(APM')$; & en intégrant, $APM=\frac{b}{a}APM'$ qui donne $APM : APM' :: b : a$; c'est-à-dire que *la surface du demi-segment elliptique, est à celle du demi-segment circulaire correspondant, comme le petit axe est au grand axe*; d'où il est aisé de conclure que *la surface entière*

de l'ellipse, est à celle du cercle décrit sur son grand axe; comme le petit axe, est au grand axe.

99. Si au lieu de compter les abscisses depuis le point *A* (*fig.* 17), on les compte du centre *C*; alors nommant *CA*, b, & *CP*, x, on aura $-dx\sqrt{(bb-xx)}$ pour l'élément du demi-segment *APM*; parce qu'alors $y=\sqrt{(bb-xx)}$, & que le segment *APM* diminue pendant que x augmente, ce qui rend la différencielle de *APM* négative.

Voici un exemple d'une différencielle qui se rapporte à cette forme.

Proposons-nous de trouver la surface du sphéroïde elliptique alongé. La formule générale de ces sortes de surfaces, est $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (74); or l'équation de l'ellipse est $yy=\frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa-xx)$; donc $y=\frac{b}{a}\times\sqrt{(\frac{1}{4}aa-xx)}$ & $dy=-\frac{b}{a}\times\frac{xdx}{\sqrt{(\frac{1}{4}aa-xx)}}$; donc $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, devient $\frac{cb}{ra}\times\sqrt{(\frac{1}{4}aa-xx)}\times\sqrt{\left(dx^2+\frac{bb}{aa}\times\frac{x^2dx^2}{\frac{1}{4}aa-xx}\right)}$, ou en faisant la multiplication indiquée, réduisant, & faisant sortir dx^2 hors du radical, $\frac{cbdx}{ra}\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa-xx+\frac{bbxx}{aa}\right)}$, ou $\frac{cbdx}{ra}\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4-aaxx+bbxx}{aa}\right)}$; or si l'on nomme k la distance *CF* au foyer *F* (*fig.* 25), on a $kk=\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}bb$, ou $4kk=aa-bb$ (*Algèbre* 230); donc l'élément de la surface devient $\frac{cbdx}{ra}\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4-4kkxx}{aa}\right)}$ ou $\frac{cbdx}{raa}\sqrt{(\frac{1}{4}a^4-4kkxx)}$.

Divisons sous le radical par $4kk$, & multiplions au-dehors par sa racine $2k$, nous aurons $\frac{2cbkdx}{raa}$. $\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx\right)}$, quantité à laquelle il faut donner le signe — pour qu'elle exprime la surface comptée depuis le point A; parce que cette surface diminue à mesure que x augmente; ainsi nous avons $- \frac{2cbkdx}{raa}$ $\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx\right)}$. Comparant donc avec $-dx$ $\sqrt{(bb - xx)}$ que nous venons de voir être l'expression d'un demi-segment circulaire dont le rayon est b, nous en conclurons que l'intégrale de $-dx\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx\right)}$, est un demi-segment de cercle OPM' dont le rayon est $\frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, & dont l'abscisse prise du centre, est x; que cette intégrale, dis-je, est égale à ce segment plus une constante. Donc si d'un rayon $CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, c'est-à-dire, troisième proportionnelle à CF & à CA, on décrit le cercle ONR, on aura $\int -dx\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx\right)} = OPM' + C$; donc $\int - \frac{2cbkdx}{raa}\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx\right)} = \frac{2cbk}{raa} \times OPM' + \frac{2cbk}{raa} \times C$.

Pour déterminer la constante C, il faut remarquer que la surface cherchée, devant commencer au point A, doit être zéro à ce point; or au point A, le demi-segment OPM' devient OAN; on a donc $0 = \frac{2cbk}{raa} \times$

$OAN + \frac{2cbk}{raa}C$, d'où l'on tire $C = -OAN$; donc l'intégrale complète est $\frac{2cbk}{raa} \times OPM' - \frac{2cbk}{raa}OAN$, ou $\frac{2cbk}{raa}(OPM' - OAN)$, ou enfin $\frac{2cbk}{raa}(APM'N)$. Donc la surface du demi-sphéroïde sera $\frac{2cbk}{raa}(ACRN)$, ou puisque $CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, & que par conséquent $\frac{2k}{aa} = \frac{1}{2CO}$, cette surface sera $\frac{c}{r} \times \frac{b}{2CO} \times ACRN$, ou $\frac{c}{r} \times \frac{CD}{CO} \times ACRN$; & celle du sphéroïde entier, en est le double.

Quant à la manière de déterminer le rayon CO, elle est simple; du point C comme centre, & du rayon CA, on décrira l'arc AL, qui coupe, en L, la perpendiculaire FL élevée sur CA au point F; on prolongera CL jusqu'à ce qu'elle rencontre en N la perpendiculaire AN, élevée au point A; ce qui donnera CN pour la valeur cherchée de CO, ou pour $\frac{\frac{1}{4}aa}{k}$; en effet, les triangles semblables CFL & CAN, donnent $CF : CA :: CL : CN$, ou $k : \frac{1}{2}a :: \frac{1}{2}a : CN = \frac{\frac{1}{4}aa}{k} = CO$.

100. A l'égard des quantités qui se rapportent immédiatement aux logarithmes, ce sont toutes celles dans lesquelles la différencielle proposée, est, ou peut être rendue, une fraction dont le numérateur soit la différencielle du dénominateur, ou

cette différencielle multipliée ou divisée par un nombre constant.

Lorsque le numérateur est exactement la différencielle du dénominateur, l'intégrale est le logarithme du dénominateur.

Ainsi $\int \frac{dx}{x} = lx + C$; $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x) + C$; $\int \frac{2xdx}{aa+xx} = l(aa+xx) + C$.

Mais, lorsque le numérateur est la différencielle du dénominateur, multipliée ou divisée par un nombre constant; alors il faut décomposer la différencielle proposée, en deux facteurs, dont l'un soit une fraction qui ait pour numérateur la différencielle exacte du dénominateur, & dont l'autre facteur soit un nombre constant. Alors l'intégrale sera le logarithme du dénominateur variable, sera, dis-je, ce logarithme multiplié par le facteur constant.

Par exemple, pour intégrer $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$, comme la différencielle de a^3+x^3 est $3x^2dx$, il faut que je prépare ma différencielle de manière à avoir $3x^2dx$ dans le numérateur; pour cet effet je l'écris ainsi $\frac{a}{3} \cdot \frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$, dont l'intégrale est $\frac{a}{3} l(a^3+x^3) + C$.

Pareillement $\int \frac{dx}{a-x} = \int \frac{1}{-1} \cdot \frac{-1dx}{a-x} =$

$- l(a-x) + C = 0 - l(a-x) + C = l1 - l(a-x) + C = l\frac{1}{a-x} + C$. De même $\int \frac{x\,dx}{aa+xx} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x\,dx}{aa+xx} = \frac{1}{2} l(aa+xx) + C = l\sqrt{(aa+xx)} + C$. Enfin $\int \frac{ax^{n-1}dx}{k+bx^n} = \int \frac{a}{bn}$. $\frac{nbx^{n-1}dx}{k+bx^n} = \frac{a}{bn} l(k+bx^n) + C = l(k+bx^n)^{\frac{a}{bn}} + C$.

Voici un exemple de la manière de déterminer ces intégrales en nombres. Supposons qu'on demande la valeur de $l(a+x)$ (a étant 5), lorsque $x = 2$. C'est donc $l\,7$ qu'il faut avoir. Je prends dans les tables ordinaires le logarithme de 7, qui est 0,8450980; je le multiplie (88) par 2,30258509 ou 2,3025851, & j'ai 1,9459100 ou 1,94591 pour la valeur de $l(a+x)$ ou de l'intégrale de $\frac{dx}{a+x}$, lorsque $a = 5$, & $x = 2$.

101. On rencontre quelquefois des différencielles qui s'intégrent directement par logarithmes, quoique cependant elle ne puissent pas être préparées comme les précédentes; par exemple $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$ est dans ce cas. On réussit quelquefois à leur donner la forme de différencielle logarithmique en essayant de les multiplier par une fonction de x, telle que le produit devienne la différencielle de cette fonction, ou cette même différencielle multipliée ou divisée

par un nombre constant. Alors en divisant par cette même fonction, la différencielle seroit évidemment une différencielle logarithmique.

En appliquant cette réflexion à $\frac{dx}{\surd(xx-1)}$, je la multiplie par $x+\surd(xx-1)$, & j'ai $\frac{xdx}{\surd(xx-1)}+dx$, qui est en effet la différencielle de $x+\surd(xx-1)$; en sorte que j'ai $\int\frac{dx}{\surd(xx-1)}=\int\frac{dx+\frac{xdx}{\surd(xx-1)}}{x+\surd(xx-1)}$ $=l[x+\surd(xx-1)]+C$.

On trouvera de même l'intégrale de $\frac{dx}{\surd(1-xx)}$ en multipliant d'abord haut & bas par $\surd(-1)$, ce qui donne $\frac{dx\surd(-1)}{\surd(xx-1)}$, dont l'intégrale, selon ce qu'on vient de voir, est $\surd(-1)\,l[x+\surd(xx-)]+C$.

102. Nous avons promis (60) d'expliquer comment il arrivoit que la règle fondamentale de l'intégration des monomes, donnoit une quantité infinie pour l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, tandis que cette intégrale a pour expression lx, ou du moins $lx+C$.

L'intégrale de $\frac{dx}{x}$ peut être finie ou infinie, selon la portion qu'on veut en avoir. Pour éclaircir ceci, remarquons d'abord que prendre l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ n'est autre chose que quarrer l'hyperbole ordinaire,

considérée par rapport à ses asymptotes. En effet, l'équation de cette courbe est $xy = aa$, ou $xy = 1$ en supposant, pour plus de simplicité, $a = 1$. Or de cette équation on tire $y = \frac{1}{x}$; donc l'élément ydx de la surface, devient $\frac{dx}{x}$; donc si l'on veut avoir les espaces comptés depuis l'asymptote AZ (*fig.* 26), l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ ou $lx + C$ doit être telle qu'elle devienne o, lorsque le point P tombe au point A, ou lorsque $x = 0$; on a donc alors $l0 + C = 0$, & par conséquent $C = -l0$: donc l'intégrale est $lx - l0$ ou $l\frac{x}{0}$; c'est-à-dire, que les espaces $ZAPMV$ comptés depuis l'asymptote sont infinis, Z & V étant supposés les extrémités de l'asymptote & de la branche correspondante de l'hyperbole; ce qui n'a rien de surprenant.

Mais si, le point O étant le sommet de l'hyperbole (auquel cas l'abscisse correspondante $AN = 1$), on veut avoir les espaces comptés depuis le point N; alors l'intégrale $lx + C$ doit être telle qu'elle devienne zéro, quand le point P tombera sur le point N, ou quand $x = 1$; on a donc $l1 + C = 0$, & par conséquent $C = -l1 = 0$; donc les espaces $NOMP$ sont exprimés par lx.

On voit par-là 1°. que les logarithmes que

donne immédiatement le calcul, expriment les eſpaces hyperboliques compris entre l'aſymptote & la courbe, & comptés depuis le ſommet O de la courbe. 2°. Que ſi l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ ou $x^{-1}dx$, priſe d'après la règle fondamentale, eſt infinie, c'eſt qu'elle exprime les eſpaces comptés depuis l'origine des aſymptotes.

Nous verrons par la ſuite, des exemples d'intégration par logarithmes.

De la manière de ramener (lorſque cela eſt poſſible) l'intégration d'une Différencielle binome propoſée, à celle d'une autre différencielle binome connue.

103. Lorſqu'après avoir fait ſur une différencielle binome propoſée l'examen néceſſaire (68 & 70) pour reconnoître ſi elle eſt intégrable, on ſe ſera aſſuré qu'elle ne l'eſt point, on ne doit pas encore ſe hâter de recourir aux méthodes d'approximation dont nous avons parlé (85 & *ſuiv.*). Il faut examiner ſi la différencielle propoſée ne pourroit pas être ramenée à une autre différencielle binome plus ſimple, dont on connut déjà l'intégrale par approximation. Or voici à quels caractères on reconnoîtra ſi une différencielle binome propoſée

peut être ramenée à une autre différencielle binome connue.

Soit $ax^m dx(b+cx^n)^p$ la différencielle proposée; & soit $ex^r dx(b+cx^n)^p$, celle à laquelle on voudroit la ramener; c'est-à-dire, que ces deux différencielles ne diffèrent que par les coëfficiens a & e, & par l'exposant de x hors du signe; r est supposé plus petit que m, & de même signe. La réduction de cette première différencielle à la seconde, sera possible, si $\frac{m-r}{n}$ est un nombre entier positif. Et pour y parvenir, on supposera $\int ax^m dx(b+cx^n)^p = (b+cx^n)^{p+1}(Ax^{m-n+1} + Bx^{m-2n+1} + Cx^{m-3n+1} + \&c.) + Q\int ex^r dx(b+cx^n)^p$, en admettant autant de termes plus un dans la suite Ax^{m-n+1} + &c. qu'il y a d'unités dans $\frac{m-r}{n}$. Et pour déterminer la valeur des coëfficiens A, B, C &c. on différenciera cette équation, & après l'avoir divisée par $(b+cx^n)^p$, on transposera tous les termes dans un seul membre; alors on égalera à zéro, la somme des termes qui multiplient une même puissance de x, on aura autant d'équations qu'il y a d'inconnues A, B, C, &c. & qui serviront à déterminer ces inconnues.

Par exemple, si j'avois à intégrer $\frac{x^6 dx}{a^5}(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$; je vois d'après ce qui a été dit (68 & 70) que cette différencielle n'est pas intégrable. Mais la forme de la

quantité sous le signe, étant la même que celle qui entre dans l'expression d'un arc de cercle, je cherche si la quantité proposée ne pourroit pas dépendre de $adx\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ qui est l'expression d'un arc de cercle dont le rayon est a, & x l'abscisse prise du centre. Je vois d'après la règle que nous venons de donner, que $\frac{m-r}{n}$ ou $\frac{6-0}{2}$ fait un nombre entier positif 3 ; j'en conclus que l'intégrale de la différencielle proposée dépend en effet d'un pareil arc de cercle ; & pour avoir cette intégrale, je suppose $\int \frac{x^6\,dx}{a^5}(aa - xx)^{-\frac{1}{2}} = (aa-xx)^{\frac{1}{2}}(Ax^5 + Bx^3 + Cx) + Q\int adx\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Différenciant, j'ai...................................

$$\frac{x^6\,dx}{a^5}(aa-xx)^{-\frac{1}{2}} = \left\{\begin{array}{l}(Ax^5+Bx^3+Cx)[-xdx(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}] \\ +(aa-xx)^{\frac{1}{2}}(5Ax^4+3Bx^2+C)dx \\ +Qadx(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}\end{array}\right.$$

Divisant par $dx\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$, j'ai..................

$$\frac{x^6}{a^5} = -Ax^6 - Bx^4 - Cx^2 + (aa-xx)(5Ax^4+3Bx^2+C) + Qa.$$

Faisant la multiplication indiquée, & transposant, il me vient

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{a^5}x^6 + Bx^4 + Cx^2 - Qa \\ + Ax^6 + 3Bx^4 + Cx^2 \\ + 5Ax^6 - 5Aa^2x^4 - 3Ba^2x^2 - Ca^2\end{array}\right\} = 0.$$

Puis donc que cette équation doit avoir lieu, quel que soit x, il faut que la somme des termes qui multiplient chaque puissance de x, soit zéro ; j'ai donc...............

$6A + \frac{1}{a^5} = 0$, $-5Aa^2 + 4B = 0$; $2C - 3Ba^2 = 0$, $-Qa - Ca^2 = 0$. Tirant

de ces équations les valeurs des inconnues A, B, &c. on a $A = -\frac{1}{6a^5}$, $B = -\frac{5}{24a^3}$, $C = -\frac{5}{16a}$, $Q = \frac{5}{16}$;

Ainsi l'intégrale de $\frac{x^6 dx}{a^5} (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ est $(aa - xx)^{\frac{1}{2}} (-\frac{x^5}{6a^5} - \frac{5x^3}{24a^3} - \frac{5x}{16a}) + \frac{5}{16} \int a dx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}} + C$. Or $\int a dx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$, étant un arc de cercle dont le rayon est a, & l'abscisse x, est facile à avoir.

104. Si la différence $m - r$ des deux exposans hors du signe, divisée par l'exposant n sous le signe ne donnoit pas un nombre entier positif, il ne faudroit pas en conclure que la réduction d'une différencielle à l'autre, n'est pas possible. Il faudroit encore rendre l'exposant sous le signe, négatif dans chaque différencielle, & si la différence des deux nouveaux exposans hors du signe divisée par l'exposant sous le signe donne un nombre entier positif, la réduction est possible.

Par exemple, si l'on demande si la quantité............ $x^{-8} dx (a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$, dépend de $dx (a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$; je vois que $\frac{m - r}{n}$ ou $\frac{-8 - 0}{4}$, ne donne point un nombre entier positif. Mais avant que d'en conclure que ces deux différencielles ne dépendent point l'une de l'autre, je les change en $x^{-10} dx (a^4 x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ & $x^{-2} dx (a^4 x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$. Or, ici, je vois que

$\frac{m-r}{n}$ ou $\frac{-10+2}{-4}$ donne un nombre entier positif; d'où je conclus que ces deux différencielles dépendent l'une de l'autre.

Pour intégrer la proposée, dans ce second cas, on opéreroit comme ci-dessus, non pas sur les deux différencielles mêmes, mais sur ce qu'elles deviennent après avoir rendu l'exposant négatif.

Ainsi dans l'exemple ci-dessus, je ferois.................

$\int x^{-10}dx\,(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}}=(a^4x^{-4}-1)^{\frac{1}{2}}(Ax^{-5}+Bx^{-1})$ $+Q\int x^{-2}dx\,(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}}$, & j'achèverois comme ci-dessus, pour déterminer les coëfficiens A, B, Q.

105. Il peut arriver dans certains cas, que la différencielle proposée soit intégrable, quoique par l'une ou l'autre de ces deux règles elle paroisse dépendante de la différencielle donnée. Mais outre qu'on est censé avoir déjà examiné par la règle donnée (68 & 70) si la différencielle proposée est intégrable, il arrivera toujours dans ce cas, que le coëfficient Q que l'on donne à la différencielle à laquelle il s'agit de réduire la proposée, sera $=0$.

Par exemple, si on demandoit si $x^{-4}dx\,(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$ est dépendant de $dx\,(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$; on trouveroit que cela ne se peut pas dans le premier des deux cas ci-dessus; mais dans le second, c'est-à-dire en changeant ces différencielles en $x^{-5}dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, &

$x^{-1}\,dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, on trouveroit que $\frac{m-r}{n}$ ou $\frac{-5+1}{-2}$ est un nombre entier positif ; ce qui indique que la première différencielle peut dépendre de la seconde. Cependant la différencielle $x^{-5}\,dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ est intégrable (68). Mais la contradiction n'est qu'apparente ; car si sur le témoignage de la quantité $\frac{m-r}{n}$ égale à un nombre entier, nous cherchons en effet à réduire $x^{-5}\,dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ à $x^{-1}\,dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, nous ferons $\int x^{-5}\,dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}=(aax^{-2}-1)^{\frac{1}{2}}(Ax^{-2}+B)$ $+Q\int x^{-1}\,dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$; & déterminant les coëfficiens A, B, Q, comme ci-dessus, nous trouverons $Q=0$ ce qui donne $\int x^{-5}\,dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, égale à une quantité purement algébrique.

106. Supposons maintenant, que les deux binomes qui entrent dans les différencielles dont il s'agit ici, aient des exposans différens ; en sorte que la différencielle proposée soit $hx^s\,dx\,(a+bx^n)^r$, & celle à laquelle on veut ramener celle-là, soit $x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$, p ayant une valeur numérique plus petite que celle de r. Si r est positif, on changera la différencielle $hx^s\,dx\,(a+bx^n)^r$, en cette autre $hx^s\,dx\,(a+bx^n)^{r-p}\times(a+bx^n)^p$. Alors si $r-p$ est un nombre entier positif, on pourra réduire $hx^s\,dx\,(a+bx^n)^{r-p}(a+bx^n)^p$

en

en une ſuite de termes de cette forme......... $(A'x^s + B'x^{s+n} + C'x^{s+2n} + \&c.)\, dx\, (a + bx^n)^p$, dont chacun peut être ramené à $x^m dx\, (a + bx^n)^p$ par la méthode précédente ſi $s - m$ peut être diviſé par n; & pour y ramener la totalité, on appliquera, mot à mot, ce qui eſt preſcrit par cette méthode, en prenant, pour ce que nous y avons appellé s, le plus grand expoſant de x dans la valeur développée de $hx^s dx\, (a + bx^n)^{r-p}$.

Par exemple, ſi j'avois $\int x^2 dx\, (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$ à réduire à $\int dx\, (bb - xx)^{\frac{3}{2}}$, je changerois $\int x^2 dx\, (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$ en $\int x^2 dx\, (bb - xx)\, (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$ ou $\int (bbx^2 dx - x^4 dx)\, (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$; alors ce que je dois prendre pour s, eſt 4. Je ſuppoſe donc, conformément à la méthode, $\int (bbx^2 dx - x^4 dx)\, (bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{\frac{3}{2}}$ $(Ax + Bx^3) + \int R\, dx\, (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$.

Si au contraire la valeur de r eſt négative, on préparera la différencielle à laquelle on veut rapporter la propoſée, on la préparera, dis-je, de cette manière, $x^m dx\, (a + bx^n)^{p-r} \times (a + bx^n)^r$; & ſi $p - r$ eſt un nombre entier, comme il ſera néceſſairement poſitif (puiſque nous ſuppoſons r négatif & plus grand que p, quel que ſoit d'ailleurs p), on pourra réduire $x^m dx\, (a + bx^n)^{p-r}\, (a + bx)^n$ à une ſuite finie de termes de cette forme........

$(A'x^m + B'x^{m+n} + C'x^{m+2n} + \&c.)(a + bx^n)^r$. Alors on agira, comme s'il étoit question de réduire cette dernière à la forme $x^t dx(a + bx^n)^r$; c'est-à-dire, qu'on opérera d'une manière toute semblable à celle que nous venons de prescrire dans le cas où r étoit positif.

Par exemple, s'il s'agissoit de réduire $gx^{-2}dx(aa + xx)^{-2}$ à $dx(aa + xx)^{-1}$ ou $\frac{dx}{aa + xx}$ qui (86) s'intègre par un arc de cercle dont x est la tangente, & a le rayon; je changerois $dx(aa + xx)^{-1}$ en $(aa + xx)dx(aa + xx)^{-2}$; & comme le plus petit exposant hors du binome proposé, est -2, je supposerois $\int R(aa + xx)dx(aa + xx)^{-2} = (aa + xx)^{-1}(Ax^{-1} + Bx) + \int gx^{-2}dx(aa + xx)^{-2}$. Et j'achèverois comme ci-dessus, pour déterminer les coëfficiens A, B & R. Alors, par la transposition, on auroit la valeur de $\int gx^{-2}dx(aa + xx)^{-2}$, dans laquelle je réduirois ensuite $R(aa + xx)dx(aa + xx)^{-2}$, à $Rdx(aa + xx)^{-1}$.

Si $p - r$ n'étoit pas un nombre entier, la réduction d'une différencielle à l'autre, ne pourroit avoir lieu.

Des Fractions rationnelles.

107. Toute quantité différencielle rationnelle, est toujours intégrable, ou algébriquement, ou par des arcs de cercle, ou par des logarithmes, ou par ces trois moyens à la fois, ou par deux seulement.

Elle eſt toujours intégrable algébriquement, lorſqu'elle ne renferme point de dénominateur variable, à moins que ce dénominateur ne ſoit monome, en exceptant ſeulement dans ce dernier cas, la circonſtance où le dénominateur ne ſeroit élevé à d'autre puiſſance que l'unité.

Il nous reſte donc, à voir la vérité de notre propoſition, dans les autres cas; c'eſt-à-dire, dans les cas où la différencielle propoſée a un dénominateur rationnel complexe.

Nous ſuppoſerons que dans le numérateur de la fraction différencielle propoſée, la variable ſoit moins élevée que dans le dénominateur. Si elle n'étoit pas dans cet état, on l'y rameneroit en diviſant le numérateur par le dénominateur juſqu'à ce que la puiſſance reſtante, fût plus petite que dans le dénominateur.

Par exemple, ſi j'avois à intégrer $\frac{x^3 dx}{aa + 3ax + xx}$ je commencerois par diviſer $x^3 dx$ par $xx + 3ax + aa$; j'aurois $x dx$ pour quotient, & $- 3ax^2 dx - aax dx$ pour reſte. Je diviſerois encore ce reſte par le même dénominateur, & j'aurois $- 3a dx$ pour quotient, & $+ 8a^2 x dx + 3a^3 dx$ pour reſte; alors, au lieu de $\frac{x^3 dx}{aa + 3ax + xx}$, je prendrois $x dx - 3a dx + \frac{8a^2 x dx + 3a^3 dx}{aa + 3ax + xx}$.

Pour découvrir par quel moyen nous pourrons intégrer les fractions différencielles rationnelles, rappellons-nous que la différencielle du logarithme d'une quantité, étant la différencielle de cette quantité divisée par cette quantité même, c'est-à-dire, étant toujours une fraction; il est assez naturel de soupçonner que l'intégration des fractions rationnelles pourra souvent dépendre des logarithmes. Prenons, par exemple, $2a$ log. $(a + x)$ — $2a$ log. $(2a + x)$; en différenciant, nous aurons $\frac{2adx}{a+x} - \frac{2adx}{2a+x}$, ou en réduisant au même dénominateur, $\frac{2aadx}{2aa+3ax+xx}$. Or, il est clair que pour intégrer cette fraction, il n'y auroit autre chose à faire qu'à la décomposer en deux fractions, dont l'une eût pour dénominateur $a + x$, & l'autre $2a + x$; & dont les numérateurs seroient des nombres constans multipliés par dx; ces deux fractions s'intégreroient alors par logarithmes.

108. Il est donc assez naturel de tenter, pour intégrer ces sortes de fractions, de les décomposer en autant de fractions simples, que le dénominateur peut avoir de facteurs, & dont chacune ait pour dénominateur un de ces facteurs; c'est en effet la méthode que l'on peut & que l'on doit suivre,

lorſque tous les facteurs, dont le dénominateur a pu être formé, ſont inégaux.

109. Mais lorſque parmi les facteurs du dénominateur, il s'en trouve qui ſont égaux entr'eux; alors on ne doit pas s'attendre que la méthode ait du ſuccès, parce que l'intégration ne peut dépendre entièrement des logarithmes.

En effet, ſi l'on avoit, par exemple, $\frac{dx}{(a+x)^2}$ dont le dénominateur a deux facteurs égaux $a+x$ & $a+x$, on trouveroit (66) que l'intégrale de cette quantité, ou de ſon égale $dx\,(a+x)^{-2}$ eſt $-(a+x)^{-1}+C$ qui ne dépend point des logarithmes. Mais on voit, en même-temps, que ſi l'on différencioit une quantité telle que $\frac{aa}{a+x}+2al\,(a+x)+2al\,(2a+x)$, on auroit $-\frac{aadx}{(a+x)^2}+\frac{2adx}{a+x}+\frac{2adx}{2a+x}$, ou $\frac{(aa+2ax)\,dx}{(a+x)^2}+\frac{2adx}{2a+x}$, ou (en réduiſant tout au même dénominateur) $\frac{4ax^2dx+9a^2xdx+4a^3dx}{(a+x)^2\,(2a+x)}$, dont l'intégrale doit évidemment renfermer une quantité algébrique & des quantités logarithmiques. Or le moyen de revenir à cette intégrale ſeroit de rendre à la différencielle, ſa forme précédente $\frac{aa+2ax}{(a+x)^2}\,dx+\frac{2adx}{a+x}$, c'eſt-à-dire, de la

décompofer en deux fractions, dont la première eût pour dénominateur tous les facteurs égaux, & dans fon numérateur toutes les puiffances de x, moindres que la plus haute puiffance du dénominateur ; à l'égard des autres fractions, elles auroient pour dénominateur, chacune, un des facteurs inégaux, & n'auroient aucune puiffance de x au numérateur. Car alors le terme $\frac{aa + 2ax}{(a + x)^2} dx$ s'intégreroit facilement par les règles données ; & le terme $\frac{2adx}{a + x}$ s'intégreroit par logarithmes. Or on peut toujours partager ainfi toute fraction rationnelle ; & c'eft ainfi que nous le pratiquerons, du moins lorfqu'il n'y aura pas de facteurs imaginaires dans le dénominateur ; cas que nous examinerons après.

Ainfi $\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots kx^{n-1} dx}{M + Nx + Px^2 + \ldots Tx^n}$ repréfentant, en général, toute fraction rationnelle, fi l'on fuppofe que le dénominateur ait un nombre m de facteurs égaux à $x + g$, un nombre p de facteurs égaux à $x + h$, &c. & un nombre quelconque de facteurs inégaux, & repréfentés par $x + i$, $x + q$, $x + r$, &c. auquel cas la fraction propofée fera...

$$\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots kx^{n-1})\,dx}{(x + g)^m (x + h)^p \times \&c.\ (x + i)(x + q)(x + r)\ \&c.}$$

il faudra, pour intégrer cette fraction, fuppofer..........

$$\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots kx^{n-1})\,dx}{(x + g)^m (x + h)^p \times \&c. \ldots (x + i)(x + q)(x + r) \times \&c.}$$

$$= \frac{Ax^{m-1}\,dx + Bx^{m-2}\,dx \ldots\ldots + R\,dx}{(x + g)^m} +$$

$\frac{A' x^{p-1} dx + B' x^{p-2} dx + \ldots\ldots R' dx}{(x+h)^p}$, &c. +

$\frac{L dx}{x+i} + \frac{M dx}{x+q} + \frac{N dx}{x+r}$ + &c. A, B, C, &c. étant des coëfficiens constans, & indéterminés. Alors, si par quelque moyen que ce soit, on détermine ces coëfficiens, il sera facile d'avoir l'intégrale. Cela est évident pour les fractions simples $\frac{L dx}{x+i}$, $\frac{M dx}{x+q}$, $\frac{N dx}{x+r}$, &c. dont l'intégrale est $Ll(x+i)$, $Ml(x+q)$, $Nl(x+r)$, &c. à l'égard des fractions $\frac{A x^{n-1} dx + B x^{n-2} dx + \ldots R dx}{(x+g)^n}$, on fera, pour plus de simplicité, $x + g = z$, ce qui donnera $x = z - g$, & $dx = dz$. Substituant ces valeurs, on réduira la totalité à une suite de monomes faciles à intégrer, & dont un seul sera de la forme $\frac{dz}{z}$, c'est-à-dire, s'intégrera par logarithmes. De même, pour les termes..... $\frac{A' x^{p-1} dx + B' x^{p-2} dx + \ldots\ldots R' dx}{(x+h)^p}$, on fera $x + h = z'$.

Ainsi, il ne nous reste que deux choses à examiner ; la première, comment on trouve les facteurs du dénominateur de la fraction différencielle proposée, la seconde, comment on trouve les coëfficiens indéterminés.

110. Pour trouver les facteurs du dénominateur, il faut se conduire comme pour résoudre l'équation qu'on auroit en égalant ce dénominateur à zéro ; puisque (*Alg.* 143) résoudre une équation, revient à chercher les facteurs binomes dont la multiplication a produit cette équation.

111. Quant à la manière de trouver les coëfficiens A, B, C; ce qui se présente de plus naturel, est de réduire au même dénominateur toutes les fractions où ils entrent; alors les deux membres de l'équation formée de la fraction proposée & de ces nouvelles fractions, ayant le même dénominateur, on peut supprimer ce dénominateur de part & d'autre; & ayant transposé tout dans un seul membre, il faut, pour que l'équation ait lieu, indépendamment de toute valeur de x; il faut, dis-je, que la somme des termes qui multiplieront une même puissance de x, soit zéro. Cette condition donnera autant d'équations qu'on a de coëfficiens indéterminés, & qui serviront à déterminer ces mêmes coëfficiens. En voici des exemples.

Proposons-nous d'intégrer $\frac{dx}{aa-xx}$; je supposerai $\frac{dx}{aa-xx} = \frac{A\,dx}{a+x} + \frac{B\,dx}{a-x}$, puisque les deux facteurs du dénominateur $aa-xx$, sont $a+x$ & $a-x$. Alors, réduisant au même dénominateur, j'ai $\frac{dx}{ax-xx} = \frac{(Aa-Ax+Ba+Bx)dx}{aa-xx}$, supprimant le dénominateur commun, divisant par dx, & transposant, j'ai $\left\{\begin{matrix} 1 & + Ax \\ -Aa & -Bx \\ -Ba & \end{matrix}\right\} = 0$,

donc $1 - Aa - Ba = 0$, & $A - B = 0$, d'où

il est facile de conclure $A = \frac{1}{2a}$, & $B = \frac{1}{2a}$; nous avons donc $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{2a}dx}{a+x} + \frac{\frac{1}{2a}dx}{a-x}$, dont l'intégrale est $\int \frac{dx}{aa - xx} = \frac{1}{2a} l(a + x) - \frac{1}{2a} l(a - x) + C = \frac{1}{2a} l \frac{a+x}{a-x} + C.$

Proposons-nous, pour second exemple, la fraction $\frac{4axx + 9a^2x + 4a^3}{(a+x)^2(2a+x)} dx$, que nous avons eue (109) en différenciant $\frac{aa}{a+x} + 2al(a+x) + 2al(2a + x)$. Nous supposerons donc $\frac{4ax^2 + 9a^2x + 4a^3}{(a+x)^2(2a+x)} dx = \frac{Ax+B}{(a+x)^2} dx + \frac{Cdx}{2a+x}$; réduisant au même dénominateur, on aura (après avoir supprimé le dénominateur commun, divisé par dx, & transposé)

$$\left.\begin{array}{llll} 4ax^2 & + 9a^2x & + 4a^3 \\ - Ax^2 & - 2Aax & - 2Ba \\ - Cx^2 & - Bx & - Caa \\ & - 2aCx & \end{array}\right\} = 0;$$

donc $4a - A - C = 0$, $9a^2 - 2Aa - B - 2aC = 0$, $4a^3 - 2Ba - Caa = 0$, équations d'où l'on tire $A = 2a$, $B = a^2$, $C = 2a$.

La différencielle proposée se changera donc en

$\frac{2ax + aa}{(a+x)^2} dx + \frac{2adx}{2a+x}$. Or le dernier terme a évidemment pour intégrale $2a$ log. $(2a + x)$. A l'égard du premier, je fais $a + x = z$, j'ai donc $x = z - a$, & $dx = dz$. Subſtituant dans $\frac{2ax + aa}{(a+x)^2} dx$, j'ai $\frac{2az - aa}{zz} dz$, ou $\frac{2adz}{z} - \frac{aadz}{zz}$ dont l'intégrale eſt $2a$ log. $z + \frac{aa}{z}$ ou $2al(a+x) + \frac{aa}{a+x}$; donc l'intégrale totale eſt $\frac{aa}{a+x} + 2a$ log. $(a+x) + 2a$ log. $(2a+x)$, ainſi qu'elle devoit être.

112. Cette méthode eſt générale. Mais on peut faciliter la recherche des coëfficiens, par plusieurs méthodes. Par exemple, on peut trouver, indépendamment les uns des autres, les coëfficiens des fractions ſimples, en cette manière. Soit $\frac{Ndx}{M}$ la fraction propoſée; $hx + a$ un des facteurs du dénominateur; & ſoit P le quotient de M diviſé par $hx + a$. Concevons $\frac{Ndx}{M}$ décompoſé en $\frac{Adx}{hx+a}$ & $\frac{Qdx}{P}$; alors nous aurons $\frac{Ndx}{M} = \frac{Adx}{hx+a} + \frac{Qdx}{P}$, ou $\frac{N}{M} = \frac{A}{hx+a} + \frac{Q}{P}$; donc en réduiſant au même dénominateur, & ayant égard à la ſuppoſition que $P = \frac{M}{hx+a}$

ou $P \times (hx + a) = M$, on aura $N = AP + Q(hx + a)$. Mais en différenciant l'équation $(hx + a)P = M$, on a $hPdx + (hx + a)dP = dM$. Or cette équation, ainsi que l'équation $N = AP + Q(hx + a)$ devant avoir lieu pour toute valeur de x, auront également lieu, lorsqu'on mettra pour x une valeur quelconque. Mettons donc pour x la valeur qui donne le résultat le plus simple : c'est-à dire, mettons pour x la valeur $-\frac{a}{h}$ que l'on a en supposant le dénominateur $hx + a = 0$; alors nous aurons $hPdx = dM$, & $N = AP$. Mettant dans la seconde, la valeur $P = \frac{dM}{hdx}$ que donne la première, on a $A = \frac{hNdx}{dM}$; c'est-à-dire, que pour avoir le numérateur A de l'une quelconque des fractions simples, il faut diviser le numérateur Ndx de la proposée, par la différencielle dM de son dénominateur, & ayant substitué pour x la valeur que l'on auroit, en égalant à zéro le dénominateur de la fraction simple, on multipliera le tout, par le coëfficient de x, dans ce dénominateur simple.

Par exemple, pour avoir les numérateurs A & B des fractions $\frac{Adx}{a + x}$ & $\frac{Bdx}{a - x}$ dans lesquelles nous avons

ci-dessus, décomposé la fraction $\frac{dx}{aa - xx}$, je différencie le dénominateur $aa - xx$, ce qui me donne $-2xdx$. Je divise donc le numérateur dx de la proposée, par $-2xdx$, ce qui me donne $-\frac{1}{2x}$, dans lequel mettant successivement pour x, $-a$ & a, (qui sont les valeurs que l'on trouve pour x, en égalant successivement à zéro, les dénominateurs $a + x$ & $a - x$ des fractions partielles), & multipliant par les valeurs 1 & -1, de h, j'ai $\frac{1}{2a}$, & $\frac{1}{2a}$ pour les valeurs de A & de B, comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

On peut de même, trouver des règles générales pour déterminer les coëfficiens des numérateurs des fractions partielles qui ont pour dénominateur le produit des racines égales; mais nous ne nous y arrêterons pas.

113. Quoique les règles que nous venons de donner pour intégrer les fractions rationnelles, soient générales; cependant, lorsque quelques-uns des facteurs du dénominateur sont imaginaires, on a pour intégrale, des quantités composées d'imaginaires, intégrale qui n'est pas moins réelle, mais que l'on ne ramène pas toujours commodément à une forme réelle. Ce qu'il faut faire dans ce cas, est d'extraire d'abord du dénominateur tous ses facteurs réels; après quoi on décompose le reste, non en facteurs

du premier degré, mais en facteurs du second, lesquels sont toujours réels. Alors pour chaque facteur du second degré, qui peut toujours être représenté par $ax^2 + bx + c$, on forme une fraction de cette forme $\frac{Axdx + Bdx}{ax^2 + bx + c}$, & l'on détermine toujours les coëfficiens comme ci-dessus.

Par exemple, si l'on avoit à intégrer la fraction $\frac{a^4 dx}{a^3 - x^3}$; on trouveroit d'abord en égalant à zéro le dénominateur $a^3 - x^3$, que $a - x$ est un de ses facteurs; puis divisant $a^3 - x^3$ par $a - x$, on auroit $a^2 + ax + x^2$ qui renferme les deux autres facteurs. Mais en égalant à zéro, cette quantité, pour avoir ses deux facteurs, on trouveroit qu'ils sont imaginaires. C'est pourquoi, sans chercher à décomposer la quantité proposée, en trois fractions qui aient pour dénominateur chacun des trois facteurs de $a^3 - x^3$, je la décomposerai seulement en deux fractions qui aient pour dénominateur, l'une le facteur $a - x$, & l'autre le facteur $a^2 + ax + x^2$; ainsi je supposerai....................

$\frac{a^4 dx}{a^3 - x^3} = \frac{Adx}{a - x} + \frac{Bxdx + Cdx}{aa + ax + xx}$. Réduisant au même dénominateur, divisant par dx, & transposant,

on a........

$$\left.\begin{array}{l} a^4 - Aax - Ax^2 \\ - Aa^2 + Cx + Bx^2 \\ - Ca - Bax \end{array}\right\} = 0.$$

Egalant à zéro la somme des termes qui multiplient une même puissance de x, on a $B - A = 0$, $C - Aa - Ba = 0$, $a^4 - Aa^2 - Ca = 0$; d'où l'on tire $A = \frac{a^2}{3}$,

$B = \frac{a^2}{3}$, $C = \frac{2a^3}{3}$. Ainsi l'on a $\frac{a^4 dx}{a^3 - x^3} =$

$$\frac{\frac{a^2}{3} dx}{a - x} + \frac{\frac{a^2}{3} x dx + \frac{2a^3}{3} dx}{a^2 + 2ax + xx}.$$

L'intégrale de la première fraction du second membre est évidente par ce qui précède ; quant à celle de la seconde fraction elle se trouve par ce qui va être dit incessamment.

114. Si parmi les facteurs du second degré, il s'en trouve qui soient égaux entr'eux, alors on formera, pour chaque groupe de facteurs égaux, une fraction de cette forme................. $\frac{A x^{2n-1} dx + B x^{2n-2} dx + \ldots Q dx}{(a x^2 + b x + c)^n}$, n étant le nombre des facteurs $a x^2 + b x + c$, qui se trouvent égaux entr'eux.

Par exemple, si l'on avoit à intégrer.................. $\frac{x^4 + 5 a x^3 + 4 a^3 x}{(aa + ax + xx)(x^3 - a^3)} dx$, on trouveroit que le dénominateur est décomposable en ces trois facteurs $x - a$, $x^2 + ax + a^2$ & $x^2 + ax + a^2$. Sans chercher à décomposer ces derniers, en facteurs simples qui seroient imaginaires, on les emploiera tels qu'on les trouve ; mais comme ils sont égaux, au lieu de les prendre pour dénominateur de pareil nombre de fractions, on prendra leur produit $(a^2 + ax + x^2)^2$ pour dénominateur d'une seule fraction, dans le numérateur de laquelle on fera entrer toutes les puissances de x, inférieures à la plus haute de celles qui se trouveront dans le dénominateur ; c'est-à-dire, ici, où la plus haute puissance de x, dans le dénominateur, est x^4 ; on mettra dans le numéra-

teur toutes les puissances de x, inférieures à x^4. Ainsi, on supposera $\frac{x^4 + 5ax^3 + 4a^3x}{(a^2 + ax + xx)(x^3 - a^3)} = \frac{Adx}{x - a} + \frac{Bx^3dx + Cx^2dx + Dxdx + Edx}{(aa + ax + xx)^2}$, & l'on déterminera les coëfficiens comme il vient d'être dit ; puis on intégrera comme il suit.

115. Il ne reste plus qu'à savoir comment on intégre ces quantités. Voyons d'abord la première ; c'est-à-dire, $\frac{Axdx + Bdx}{ax^2 + bx + c}$.

Supposons, pour plus de simplicité, qu'elle est réduite à cette forme $\frac{A'xdx + B'dx}{x^2 + a'x + b'}$, ce que l'on peut toujours faire, en divisant haut & bas, par a.

Alors on fera disparoître le second terme du dénominateur, en faisant $x + \frac{1}{2}a' = z$: ce qui donne $x = z - \frac{1}{2}a'$, & $dx = dz$; substituant, on aura une quantité de cette forme.......... $\frac{Czdz + Ddz}{zz + qq}$, dont la première partie $\frac{Czdz}{zz + qq}$ s'intégre par logarithmes (99) ; & la seconde s'intégre par un arc de cercle dont le rayon est q, & la tangente est z.

Quant aux quantités de la forme........... $\frac{Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \ldots Qdx}{(x^2 + ax + b)^n}$; on fera, de même, disparoître le second terme du dénominateur, & l'on aura une quantité de cette forme

$\frac{Mz^{2n-1}dz + Nz^{2n-2}dz + \ldots Tdz}{(zz+qq)^n}$, que l'on intégrera, en se proposant de ramener à $\frac{dz}{zz+qq}$, selon la méthode donnée (103), l'intégrale de la somme des termes où z aura des exposans pairs. Quant à ceux où les exposans serons impairs, ils s'intégreront par ce qui a été dit (68).

Ainsi, toute fraction rationnelle, ou s'intégre exactement, ou ne dépend, tout au plus, que des arcs de cercle & des logatithmes.

De quelques transformations qui peuvent faciliter les Intégrations.

116. On ne peut donner de règles générales sur cette manière. L'inspection des quantités, l'usage & l'adresse, dictent dans chaque occasion, ce qu'on doit faire.

Le but des transformations dont il s'agit ici, est de rendre rationnelles, les différencielles proposées, parce qu'alors on sait les intégrer. Sur cela, voici quelques observations.

117. S'il n'y a de quantités radicales, que des monomes, on les ramènera d'abord à des exposans fractionnaires, que l'on réduira tous au même dénominateur. Alors, si $x^{\frac{k}{l}}$ représente une de ces quantités ainsi préparées, on fera $x^{\frac{1}{l}} = z$; ce qui

qui donnera $x = z^{l}$, & $dx = l z^{l-1} dz$. On substituera, & l'on aura une quantité toute rationnelle.

Par exemple, si l'on avoit $\frac{dx\sqrt{x} + adx}{\sqrt[3]{x^{2}} + \sqrt{x}}$, je l'écrirois ainsi $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx + adx}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}$; puis je la changerois en......... $\frac{x^{\frac{3}{6}}dx + adx}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}$. Faisant donc $x^{\frac{1}{6}} = z$; j'aurois $x = z^{6}$, $dx = 6z^{5}dz$; & par conséquent $\frac{6z^{8}dz + 6az^{5}dz}{z^{4} + z^{3}}$, qui se réduit à $\frac{6z^{5}dz + 6az^{2}dz}{z + 1}$, & s'intègre facilement, par ce qui a été dit sur les fractions rationnelles.

118. Toute quantité dans laquelle il n'y aura qu'un radical complexe, qui ne passera pas le second degré, & où la variable, sous le radical, ne passera pas le second degré, peut toujours être rendue rationnelle par l'un ou l'autre des deux moyens suivans. 1°. Après avoir dégagé le quarré de la variable sous le radical, on égalera ce radical, à cette même variable, plus ou moins une autre variable ; 2° ou bien on décomposera la quantité affectée du radical, en ses deux facteurs ; & on l'égalera, ainsi décomposée, à l'un de ses facteurs, multiplié par une nouvelle variable.

Par exemple, si j'avois $\frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}}$, je puis faire

$\sqrt{(xx-aa)} = x - z$; j'aurai $x = \frac{zz+aa}{2z}$.
Donc $dx = \frac{(zz-aa)dz}{2zz}$, & $\sqrt{(xx-aa)} = \frac{aa-zz}{2z} = -\frac{(zz-aa)}{2z}$; d'où $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}} = -\frac{dz}{z}$, qui est facile à intégrer.

Je pourrois aussi, dans ce même exemple, faire $\sqrt{(xx-aa)}$, ou $\sqrt{[(x-a)(x+a)]} = (x-a)z$; alors j'aurois, en quarrant & divisant ensuite par $x-a$, $x+a = (x-a)zz$; d'où $x = \frac{a+azz}{zz-1}$; $\sqrt{(xx-aa)} = \frac{2az}{zz-1}$; $dx = \frac{-4azdz}{(zz-1)^2}$; donc $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{-2dz}{zz-1}$, qui s'intègre par les règles ci-dessus, pour les fractions rationnelles.

On peut appliquer ces méthodes à la rectification de la parabole, dont l'élément $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ est........... $\sqrt{(dy^2+\frac{4y^2dy^2}{p^2})}$, ou $dy\sqrt{(1+\frac{4y^2}{p^2})}$. On dégagera d'abord y^2, en écrivant $\frac{2dy}{p}\sqrt{(\frac{p^2}{4}+y^2)}$; & on fera $\sqrt{(\frac{p^2}{4}+y^2)} = y+z$.

119. Quand il n'y a point de second terme sous le radical, on peut égaler le radical à une nouvelle variable multipliée par la variable actuelle.

Par exemple, si j'avois $\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$; je pourrois faire $\sqrt{(aa-xx)} = xz$. Et s'il y avoit un second

terme, on pourroit encore faire usage de cette transformation, en faisant d'abord disparoître ce second terme.

120. Enfin, on peut, dans la vue de rendre rationnelle, tenter d'égaler la variable, ou une fonction quelconque de la variable, à une nouvelle variable ou à une fonction d'une nouvelle variable, dans laquelle on laisse quelque chose d'indéterminé, & qui puisse servir à l'objet qu'on a en vue.

Par exemple, pour savoir dans quels cas on peut rendre rationnelle la quantité $x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$, je ferois $(a+bx^n)^p = z^q$, q étant indéterminé.

J'aurois $a+bx^n = z^{\frac{q}{p}}$; $x^n = \dfrac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}$;

$$x = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad x^m = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}};$$

$$dx = \frac{q}{npb}\, z^{\frac{q}{p}-1}\, dz \left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1};$$

donc $x^m\,dx\,(a+bx^n)^p = \dfrac{q}{npb}\, z^{\frac{q}{p}+q-1}$

$$dz \cdot \left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1},$$ qui est intégrable, quelque soit q, lorsque $\dfrac{m+1}{n}-1$, est un nombre entier positif ou zéro; & qui peut être rendue rationnelle, en faisant $q=p$, lorsque $\dfrac{m+1}{n}-1$ est un nombre

entier négatif. Et si p a pour valeur $\pm \frac{k}{2}$, k étant un nombre entier impair, on ramènera au cas mentionné (118), en faisant $q = k$, si $\frac{m+1}{n}$ a pour valeur $\pm \frac{k'}{2}$, k' étant un nombre entier impair.

121. Nous ne nous arrêterons pas à étendre ces sortes de transformations. Nous ferons seulement remarquer, qu'on facilite souvent certaines intégrations en égalant la variable à une fraction telle que $\frac{1}{z}$.

Par exemple, si j'avois $\frac{x^{15}dx + adx}{x^{19} + x^{18}}$; en faisant $x = \frac{1}{z}$, j'aurois $\frac{-z^{2}dz - az^{18}dz}{1 + zz}$, que par la division, on réduira à une suite de monomes, & à une quantité de la forme $\frac{A\,dz}{1+zz}$ dont on connoît actuellement l'intégrale.

De l'Intégration des Quantités exponentielles.

122. Il n'y a pas d'autres régles à donner sur l'intégration de ces quantités, que de tenter de les décomposer en deux facteurs, dont l'un soit la différencielle du logarithme de l'autre, ou en soit une partie constante (28); alors on divise par la différencielle du logarithme de ce second facteur.

Ainsi je vois que $x^y\,(dy\,lx + \frac{y\,dx}{x})$ est intégrable ; parce que le facteur $dy\,lx + \frac{y\,dx}{x}$ est la différencielle de $y\,lx$, qui est le logarithme de x^y ; j'aurai donc pour intégrale $\frac{x^y\,(dy\,lx + \frac{y\,dx}{x})}{d\,(lx^y)} + C$; c'est-à-dire, $x^y \frac{(dy\,lx + \frac{y\,dx}{x})}{dy\,lx + \frac{y\,dx}{x}} + C$, ou $x^y + C$. Par cette même règle, je vois que $dx\,e^{ax}$ est intégrable, parce que dx est la différencielle du logarithme de e^{ax}, divisée par une constante. J'ai donc $\int dx\,e^{ax} = \frac{dx\,e^{ax}}{a\,dx\,le} = \frac{e^{ax}}{a\,le}$. Dans le cas où e est le nombre dont le logarithme est 1, la règle se réduit à diviser la différencielle proposée, par la différencielle de l'exposant de e.

Si l'on avoit à intégrer $x^m\,dx\,e^{ax}$, e étant le nombre dont le logarithme est 1, on le pourroit, lorsque m est un nombre entier positif, en faisant $\int x^m\,dx\,e^{ax} = e^{ax}\,(A\,x^m + B\,x^{m-1} + E\,x^{m-2} + \text{\&c.} + k.)$ Par exemple, si j'ai $x^2\,dx\,e^{ax}$, je suppose $\int x^2\,dx\,e^{ax} = e^{ax}\,(A\,x^2 + B\,x + E)$. En différenciant (28), & divisant ensuite par $dx\,e^{ax}$, j'ai $x^2 = \left\{\begin{matrix} A\,a\,x^2 + a\,B\,x + a\,E \\ + 2\,A\,x + B \end{matrix}\right\}$; donc $A\,a = 1$, $a\,B + 2\,A = 0$, $a\,E + B = 0$; c'est-à-dire, $A = \frac{1}{a}$, $B = \frac{-2}{aa}$, $E = \frac{2}{a^3}$; donc l'intégrale de $\int x^2\,dx\,e^{ax}$ est $e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2\,x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) + C$.

On peut employer avantageusement le nombre e dont le logarithme est 1, pour l'intégration de plusieurs quantités, principalement quand elles renferment des logarithmes.

Par exemple, si j'avois à intégrer $x^n dx (lx)^m$, je ferois $lx = z = zle$; donc $x = e^z$; $dx = dze^z$; & par conséquent $x^n dx (lx)^m = z^m dz e^{(n+1)z}$, qui s'intègre dans le même cas que la précédente, & de la même manière.

De l'Intégration des quantités à deux, ou à un plus grand nombre de Variables.

123. Si l'on se rappelle la règle que nous avons donnée pour différencier les quantités à plusieurs variables, on verra que pour intégrer les différencielles à plusieurs variables (lorsque cela est possible), il faut rassembler tous les termes affectés de la différencielle d'une même variable, & les intégrer comme s'il n'y avoit d'autre variable que celle là, c'est-à-dire, comme si toutes les autres étoient constantes. Alors si l'on différencie cette intégrale en faisant varier successivement toutes les variables, & que l'on retranche le résultat, de la différencielle proposée, l'intégrale qu'on a trouvée, est (en ajoutant une constante) la véritable intégrale, s'il ne reste rien. S'il y a un reste, il ne renfermera pas la variable par rapport à laquelle on a intégré;

on suivra à l'égard de ce reste, le même procédé qu'on a suivi d'abord, & ainsi de suite par rapport à chaque variable.

Par exemple, si j'avois $3x^2y\,dx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$; je prendrois les deux termes affectés de dx, savoir $3x^3y\,dx + y^5dx$, & je les intégrerois comme si y étoit constant. L'intégrale est $x^3y + y^5x$. Or cette quantité étant différenciée par rapport à x & à y, & le résultat étant retranché de la différencielle proposée, il ne reste rien; j'en conclus que l'intégrale est $x^3y + y^5x + C$.

Si j'avois $x^3dy + 3x^2y\,dx + x^2dz + 2xz\,dx + x\,dx + y^2dy$; en rassemblant tous les termes affectés de dx, & intégrant, en regardant y & z comme constantes, j'aurois $x^3dy + x^2z + \frac{x^2}{2}$. Mais en retranchant la différencielle de cette quantité, prise en faisant varier x, y & z; en la retranchant, dis-je, de la proposée, il reste y^2dy; je prends donc l'intégrale de y^2dy qui est $\frac{y^3}{3}$, & l'ajoutant à celle que j'ai déja trouvée, j'ai (en y comprenant la constante) $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$, pour l'intégrale.

124. Mais comme il n'est pas toujours possible d'intégrer toute différencielle à plusieurs variables, il est bon de faire connoître à quel caractère on distinguera si cela se peut.

125. Pour y parvenir, il faut observer que si dans une quantité Q composée, comme on le

voudra, de deux autres quantités x & y, on substitue d'abord pour x une quantité quelconque p, & que dans le résultat on substitue pour y une quantité q, on aura la même chose que si on avoit commencé par substituer q pour y, & ensuite p pour x; cela évident.

126. Il suit de-là, que si on différencie une quantité quelconque Q composée de x, y & de constantes, en ne faisant d'abord que x variable, & qu'ensuite on différencie le résultat en ne faisant que y variable, on aura la même chose que si l'on eût d'abord différencié en regardant y seule comme variable, & qu'ensuite on eût différencié ce résultat, en regardant x seule comme variable.

En effet, concevons qu'en mettant d'abord $x + dx$, pour x, Q devienne Q'; on aura $Q' - Q$ pour la différencielle. Concevons qu'en mettant $y + dy$ dans celle-ci, au lieu de y, Q devienne Q'', & que Q devienne Q''', ensorte que $Q' - Q$ devienne $Q'' - Q'''$, on aura $Q'' - Q''' - Q' + Q$ pour la seconde différencielle.

Faisons maintenant nos substitutions en sens contraire; & puisqu'en mettant $y + dy$, au lieu de y dans Q, il devient Q''', on aura $Q''' - Q$ pour la première différencielle dans la supposition de y variable. Si nous mettons maintenant $x + dx$, au lieu de x dans cette quantité, Q deviendra Q', comme ci-dessus; & Q''' (125) deviendra Q'', ensorte que $Q''' - Q$ deviendra $Q'' - Q'$; donc la seconde differencielle sera

$Q'' - Q' - Q''' + Q$, précisément la même que la première.

Cela posé, convenons que si A représente une quantité composée de x & de y, $\frac{dA}{dy}dy$ marquera la différencielle de A prise en faisant varier y, $\frac{dA}{dx}dx$, celle de A prise en faisant varier x. De même, $\frac{ddA}{dxdy}$, $dxdy$ marquera que l'on différencie d'abord A, en supposant x seule variable, & qu'en suite on différencie le résultat en faisant varier y seul.

127. Ces éclaircissemens posés, soit $Adx + Bdy$ une différencielle exacte, & M son intégrale; on aura donc $\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy = Adx + Bdy$; donc $\frac{dM}{dx} = A$, & $\frac{dM}{dy} = B$; donc aussi $\frac{ddM}{dxdy}dy = \frac{dA}{dy}dy$, & $\frac{ddMdx}{dydx} = \frac{dBdx}{dx}$, ou $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{dA}{dy}$, & $\frac{ddM}{dydx} = \frac{dB}{dx}$; or nous venons de démontrer (126) que $\frac{ddMdxdy}{dxdy} = \frac{ddMdydx}{dydx}$; donc $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{ddM}{dydx}$; donc aussi $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; c'est-à-dire, que si $Adx + Bdy$ est une différencielle complète, la différencielle

de A prise en faisant varier y seule, & divisant par dy, doit être égale à la différencielle de B prise en faisant varier x seule, & divisant par dx.

Ainsi je reconnois que $\frac{1}{3}y^3 dx + xy^2 dy$ est une différencielle complette, parce que $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$; en effet, le premier membre se réduit à $\frac{y^2 dy}{dy}$, & le second à $\frac{y^2 dx}{dx}$. Au contraire je vois que $xydx + 2xdy$ n'est pas intégrable, parce que $\frac{d(xy)}{dy}$ n'est pas égal à $\frac{d(2x)}{dx}$.

128. S'il entre plus de deux variables dans la différencielle proposée; c'est-à-dire, si elle est de cette forme $Adx + Bdy + Cdz$, il faut pour qu'elle soit intégrable, que l'on ait $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$; en effet, on peut regarder successivement z, y & x comme constantes; & la différencielle qui n'a plus alors que deux termes (puisque cette supposition donne ou $dz = 0$, ou $dy = 0$, ou $dx = 0$), n'en doit pas moins être une différencielle complète si la proposée l'est, elle doit donc, dans chacun de ces cas, avoir les qualités des différencielles complètes à deux variables.

Il est aisé, d'après cela, de trouver les conditions pour un plus grand nombre de variables.

Des Équations différencielles.

129. Lorsque l'équation différencielle proposée ne renferme que deux variables, x & y ; & que l'on a, dans un seul membre, les x & dx ; & les y & dy dans l'autre ; alors l'intégration se réduit, pour chaque membre, aux régles que nous avons données pour les différencielles à une seule variable.

Ainsi, si l'on avoit $ax^m y^n dx = by^q x^r dy$, qui peut représenter toutes les équations différencielles à deux termes ; cette équation dont les indéterminées se séparent tout de suite en divisant par y^n & par x^r, devient $ax^{m-r}dx = by^{q-n}dy$, dont l'intégrale est évidemment $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C$.

130. Mais comme il peut arriver que l'un ou l'autre, ou aucun des deux membres de l'équation différencielle séparée, ne soit intégrable algébriquemeut, & que néanmoins l'équation puisse être algébrique, ou du moins remenée à une forme algébrique, il est bon d'examiner ceux de ces cas qui se rencontrent le plus fréquemment.

Par exemple, si dans l'équation précédente, on avoit $m - r = -1$, & $q - n = -1$; l'équation différencielle se réduiroit à $\frac{adx}{x} = \frac{bdy}{y}$, dont on ne peut avoir l'in-

tégrale de chaque membre que par logarithmes; ensorte qu'on a $a l x = b l y + l C$*. Mais cette équation peut être rendue algébrique, en l'écrivant ainsi $l x^a = l y^b + l C$; ou $l x^a = l C y^b$; or il est évident que si les deux logarithmes sont égaux; les deux quantités auxquelles ils appartiennent, doivent être égales; donc $x^a = C y^b$, équation algébrique.

Si l'on avoit seulement $q - n = -1$, l'équation différencielle seroit $a x^{m-r} dx = \frac{b\,dy}{y}$, dont l'intégrale est $\frac{a x^{m-r+1}}{m-r+1} = b l y + l C$; mais on peut donner à cette équation une forme algébrique, en multipliant le premier membre par $l e$, e étant le nombre dont le logarithme est 1; car alors on ne changera rien à l'équation. On aura donc $\frac{a x^{m-r+1}}{m-r+1} l e = b l y + l C$, ou (en faisant $m - r + 1 = p$) $l e^{\frac{a x^p}{p}} = l C y^b$, & par conséquent $e^{\frac{a x^p}{p}} = C y^b$. Dorénavant nous marquerons toujours par e, le nombre dont le logarithme est 1.

131. Prenons pour second exemple, l'équation $n\,dx = \frac{dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$; le second membre exprime l'élément d'un arc de cercle dont z est le sinus, & 1 le rayon; z est donc le sinus de $\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$, c'est-à-dire, de $\int n\,dx$ ou de $n x + C$. On a donc pour intégrale, $z = \text{sin.}\,(n x + C)$. Pareillement, de l'équation $n\,dx = \frac{-dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$, on concluroit $z = \text{cos.}\,(n x + C)$.

* On est le maître de supposer que la constante est un logarithme.

132. De même, puisque $\frac{dz}{1+zz}$ exprime l'élément d'un arc de cercle dont 1 est le rayon, & z la tangente; si l'on avoit $ndx = \frac{dz}{1+zz}$, on concluroit $z =$ tang. $(nx + C)$. Mais si on avoit $ndx = \frac{bdz}{a+fzz}$; pour la ramener à la forme de la précédente, on feroit $z = mu$, m étant un coëfficient constant; alors on auroit $ndx = \frac{bmdu}{a+fm^2u^2}$; supposant donc $fm^2 = a$, on auroit $m = \sqrt{\frac{a}{f}}$, ce qui donneroit $ndx = b\frac{\sqrt{\frac{a}{f}}\,du}{a+auu}$, d'où l'on tire $\frac{du}{1+uu} = \frac{n}{b}dx\sqrt{af}$; donc u, ou $\frac{z}{m}$ ou $z\sqrt{\frac{f}{a}} =$ tang. $(\frac{n}{b}x\sqrt{af} + C)$. Donc $z = \sqrt{\frac{a}{f}}$. tang. $(\frac{n}{b}x\sqrt{af} + C)$.

133. Dans les expressions sin. $(nx + C)$, tang. $(nx + C)$, que nous venons de trouver, $nx + C$ exprime la longueur absolue de l'arc en parties du rayon 1. Mais comme il est plus commode d'employer les nombres de degrés que les longueurs mêmes, il faudra quand on rencontrera de pareilles expressions, évaluer les arcs en degrés; ce qui est facile en les divisant, par le nombre de parties du rayon que contient un degré, c'est-à-dire, par 0,0174533, (ou ce qui revient au même) en les multipliant par 57,2974166.

Ainſi le ſinus de l'arc qui a pour longueur b, ou le ſinus de l'arc qui a un nombre de degrés exprimé par $b \times 57,2974166$, ſont la même choſe.

134. Si l'on avoit $\frac{n\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ dont les deux membres expriment les élémens de deux arcs qui ſont l'un à l'autre $: : 1 : n$, & dont les ſinus ſont x & y; alors pour intégrer on rendroit chaque membre rationnel, en faiſant pour le premier $\sqrt{(1-xx)} = x\sqrt{(-1)} - z$; & pour le ſecond, $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} - t$. L'équation ſe changeroit en $\frac{n\,dz}{z} = \frac{dt}{t}$, dont l'intégrale eſt $n\,lz = lt + lC$, d'où l'on tire $Ct = z^n$; & en mettant pour z & t leurs valeurs, $C[y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-xx)}]^n$, qui exprime généralement le rapport des ſinus x & y de deux arcs multiples l'un de l'autre.

Mais pour faire uſage de cette équation, il faut, auparavant, déterminer la conſtante C. Or ſuppoſons (comme on le peut) que les deux arcs ont une même origine; alors x & y doivent devenir zéro en même-temps; mais dans ce cas, l'équation devient $-C\sqrt{1} = (-\sqrt{1})^n$, ou $-C = (-1)^n$; or $(-1)^n$ eſt $+1$ ou -1, ſelon que n eſt pair ou impair; on a donc $-C = \pm 1$, & $C = \mp 1$; le ſigne ſupérieur étant pour le cas de n pair; & l'inférieur, pour n impair; donc enfin $\mp [y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)}]^n$.

Dans chaque cas particulier, on pourra toujours faire diſparoître les imaginaires; mais le moyen le plus ſimple ſera d'égaler à zéro (après avoir tout tranſpoſé dans un ſeul membre) la ſomme des quantités réelles; alors on verra que l'équation

restante sera divisible par $\sqrt{(-1)}$, & sera la même que celle qu'on aura formée, en égalant à zéro la somme des quantités réelles. Par exemple, si l'on fait $n = 2$, on aura $-y\sqrt{(-1)} + \sqrt{(1-yy)} = -xx - 2x\sqrt{(-1)}$. $\sqrt{(1-xx)} + 1 - xx$, ou $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 + 2x\sqrt{-1}.\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{-1} = 0$; égalant donc à zéro, la somme des quantités réelles, on aura $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = 0$; & l'équation totale sera réduite à $2x\sqrt{(-1)}.\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{(-1)} = 0$, qui étant divisée par $\sqrt{(-1)}$, donne $2x\sqrt{(1-xx)} - y = 0$, ou $y = 2x\sqrt{(1-xx)}$; or si l'on quarre cette équation, & l'équation $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = 0$, ou plutôt $\sqrt{(1-yy)} = 1 - 2xx$, on aura le même résultat.

On peut, de la même manière, trouver les cosinus & les tangentes des arcs multiples. Pour ces dernières, on intégreroit $\frac{ndx}{1+xx} = \frac{dy}{1+yy}$ en décomposant $1+xx$ en $(1+x\sqrt{-1})(1-x\sqrt{-1})$, & $1+yy$ en $(1+y\sqrt{-1})(1-y\sqrt{-1})$; on acheveroit ensuite, par ce qui a été dit, sur les fractions rationnelles.

135. Pendant que nous sommes sur cette matière, faisons connoître une manière d'exprimer le sinus & le cosinus d'un arc, laquelle peut être d'usage.

Soit donc $dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, l'équation qui exprime la relation entre un arc x & son sinus y. Si l'on fait $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} - z$, on aura $dx = \frac{-dz}{z\sqrt{(-1)}}$, ou $\frac{dz}{z} = -dx\sqrt{(-1)}$, dont l'intégrale est

$lz = -x\sqrt{-1} + lC$; ou $lz = -x\sqrt{-1}\,le + lC$, qui donne $z = Ce^{-x\sqrt{(-1)}}$; & mettant pour z, sa valeur, on a $y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-yy)} = Ce^{-x\sqrt{(-1)}}$. A l'égard de la constante C, on la déterminera en observant que l'arc x & son sinus doivent devenir zéro en même-temps; on aura donc $-\sqrt{1} = C$; donc $y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-yy)} = -e^{-x\sqrt{(-1)}}$; & par conséquent $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{(-1)} + e^{-x\sqrt{(-1)}}$; quarrant, & réduisant, on aura $y = \frac{1 - e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{(-1)}.e^{-x\sqrt{-1}}}$ $= \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; donc puisque y est sinus de x, on a sin. $x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{-1}}$.

Si dans le second membre de l'équation $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{(-1)}}$, on met pour y, la valeur qu'on vient de trouver, on aura $\sqrt{(1-yy)}$, c'est-à-dire, cos. $x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2} + e^{-x\sqrt{(-1)}} = \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} + e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2}$; donc cos. $x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$. Revenons à l'intégration des équations.

136. Lorsque les indéterminées ne sont pas séparées dans l'équation différencielle proposée, alors avant d'entreprendre de les séparer, il faut voir si, par hasard, l'équation ne seroit pas intégrable dans l'état où elle est. Or c'est ce que l'on reconnoîtra (127), en examinant si $\frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dy}$, supposant que $Adx + Bdy = 0$ représente cette équation. Si cette

cette condition avoit lieu, on intégreroit, comme il a été dit (123).

137. Cependant il pourroit se faire que cette condition n'eût pas lieu, & que l'équation n'en fût pas moins intégrable; mais ce seroit en la multipliant par un facteur convenable, composé de x, de y, & de constantes.

Soit P, ce facteur. Alors $APdx + BPdy = 0$, sera donc une différencielle complète. Il faut donc que $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}$. La question est donc réduite à trouver pour P une fonction de x, de y, & de constantes, qui satisfasse à cette équation. Mais comme cette recherche est d'une trop longue discussion, nous nous bornerons à trouver P dans le cas où il ne doit renfermer que des x & des constantes seulement, ou des y & des constantes seulement. Supposons donc que P ne doit contenir que des x, on aura simplement $P\frac{dA}{dy} = B\frac{dP}{dx} + P\frac{dB}{dx}$, d'où l'on tire $\frac{dP}{P} = \frac{\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)}{B}dx$; on aura donc aisément P, si $\frac{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}}{B}$ se réduit à une fonction de x, comme cela est nécessaire, pour que P soit, comme on le suppose, une fonction de x seule.

On pourroit encore trouver le facteur, s'il devoit être composé d'une fonction de x, multipliée ou divisée par une fonction de y d'une forme connue.

138. C'est, par ce moyen, qu'on peut intégrer généralement toute équation de la forme suivante, $Xy^q dy + X'y^{q+1} dx + X''y^r dx = 0$, X, X', X'' étant des fonctions quelconques de x; q & r des exposans quelconques.

Je pourrois chercher, si elle ne devient pas intégrable en la multipliant par un facteur de la forme Py^n, P étant une fonction de x, & n un exposant indéterminé; & je trouverois que cela se peut, en supposant $n = -r$. Mais il est plus simple de réduire tout de suite l'équation à cette forme $y^{q-r}dy + Fy^{q-r+1}dx + F'dx = 0$, en divisant par X & par y^r, & représentant par F & F' les quotients $\frac{X'}{X}$ & $\frac{X''}{X}$. Alors pour intégrer celle-ci, je suppose que P soit le facteur; P étant une fonction de x. J'aurai donc $Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx + F'Pdx = 0$. Or si P est une fonction de x, $F'P$ en sera une aussi; $\int F'Pdx$ se réduira donc à l'intégration des quantités à une seule variable. Il ne s'agit donc que de rendre $Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx$ une différencielle complète; ce qui exige que $\frac{d(Py^{q-r})}{dx} = \frac{d(FPy^{q-r+1})}{dy}$, c'est-à-dire que $y^{q-r}\frac{dP}{dx} = (q-r+1)y^{q-r}FP$; d'où l'on tire $\frac{dP}{P} = (q-r+1)Fdx$; & en intégrant $lP = \int(q-r+1)Fdx = \int(q-r+1)Fdx . le$; donc $P = e^{\int(q-r+1)Fdx}$ Substituant cette valeur de P dans l'équation $Py^{q-r}dy$ + &c. & intégrant, on aura $\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1}e^{\int(q-r+1)Fdx} + \int F'dx\, e^{\int(q-r+1)Fdx} + C = 0$.

Je n'ai point ajouté de constante, dans l'intégration

de l'équation qui a donné P, parce que n'y ayant aucune condition pour la déterminer, on est maître de la supposer nulle.

Prenons un exemple. Supposons qu'on ait à intégrer $dy + \frac{aydx}{x} + (bx^2 + cx + f)dx = 0$. En multipliant par le facteur P, on aura $Pdy + \frac{ayPdx}{x} + P(bx^2 + cx + f)dx = 0$; il faut donc que $\frac{dP}{dx} = \frac{d\left(\frac{ayP}{x}\right)}{dy} = \frac{aP}{x}$; donc $\frac{dP}{P} = \frac{adx}{x}$, donc $lP = alx$ ou $P = x^a$. L'équation devient donc $x^a dy + ax^{a-1}ydx + bx^{a+2}dx + cx^{a+1}dx + fx^a dx$, dont l'intégrale est $x^a y + \frac{bx^{a+3}}{a+3} + \frac{cx^{a+2}}{a+2} + \frac{fx^{a+1}}{a+1} + C = 0$.

139. L'équation générale que nous venons d'intégrer, se rencontre assez fréquemment; & la méthode que nous avons employée, peut s'appliquer dans beaucoup d'autres cas.

Par exemple, si l'on avoit les deux équations . . . . . $dx + ady + (bx + cy)Tdt = 0$, $kdx + a'dy + (b'x + c'y)Tdt = 0$, x, y, & t étant trois variables a, b, c, a', &c. des constantes & T une fonction quelconque de t, on réduiroit l'intégrale de ces deux équations, à la méthode précédente, en cette manière. Je multiplie l'une des deux, la première, par exemple, par un coëfficient indéterminé & constant g; & ajoutant à la seconde, je multiplie la totalité par un facteur P, que je suppose être une fonction de t; j'aurai . . . .

$(gP+kP)\,dx+(gaP+a'P)\,dy+[(gbP+b'P)\,x+(gcP+c'P)\,y]\,T\,dt=0$. Suppofons maintenant que cette équation foit une différencielle exacte ; il faudra (128) que l'on ait 1°. $\frac{d(gP+kP)}{dt}=\frac{d[(gbP+b'P)x+(gcP+c'P)y]}{dx}T$; 2.° $\frac{d(gaP+a'P)}{dt}=\frac{d[(gbP+b'P)x+(gcP+c'Py]}{dy}T$; 3.° $\frac{d(gP+kP)}{dy}=\frac{d(gaP+a'P)}{dx}$. Or P étant fuppofé une fonction de t, cette dernière équation a lieu, puifqu'elle fe réduit à $0=0$. Et les deux autres donnent $(g+k)\frac{dP}{dt}=(gb+b')PT$, & $(ga+a')\frac{dP}{dt}=(gc+c'P)\,T$; d'où l'on tire $\frac{dP}{P}=\frac{gb+b'}{g+k}Tdt$, & $\frac{dP}{P}=\frac{gc+c'}{ga+a'}Tdt$; donc égalant ces deux valeurs de $\frac{dP}{P}$, & divifant par Tdt, on aura $\frac{gb+b'}{g+k}=\frac{gc+c'}{ga+a'}$, équation où g montera au fecond degré, & qui étant réfolue, donnera deux valeurs de g.

Suppofant donc g connu, on aura aifément P; puifque l'équation $\frac{dP}{P}=\frac{gb+b'}{g+k}Tdt$, donne . . .
$P=e^{\int\frac{gb+b'}{g+k}Tdt}$. Or l'équation $(gP+kP)dx+$ &c. étant actuellement une différentielle exacte, fi on l'intègre, on aura $(gP+kP)\,x+(gaP+a'P)y+C=0$: donc fi g marquant la première valeur de g donnée par l'équation du fecond degré, ci-deffus, on repréfente par g', la feconde valeur de g; & par P' ce que devient P, en

mettant g' pour g, on aura aussi $(g' P' + k P')x + (g' a P' + a' P')y + C' = 0$, C' étant une nouvelle constante. En effet, il n'y a aucune raison pour employer une des valeurs de g plutôt que l'autre. Or de ces deux équations, il est facile de conclure les valeurs de x & de y, qui seront exprimées en t & en constantes.

140. Lorsque l'équation différencielle proposée ne rentre pas dans les cas que nous avons exposés jusqu'à présent; alors il faut voir si l'on ne peut pas séparer les indéterminées. Quelquefois il ne faut, pour cela, que l'application des règles ordinaires de l'Algèbre; d'autres fois il faut des transformations. Mais il y a beaucoup d'équations à l'égard desquelles on ignore quelle est la transformation convenable.

L'équation $a x^n dx + b y^q x^n dx = y^k dy(e + f x^h)^r$ se sépare immédiatement par la division, parce qu'elle est la même chose que $(a + b y^q) x^n dx = y^k dy(e + f x^h)^r$, qui devient $\frac{x^n dx}{(e + f x^h)^r} = \frac{y^k dy}{a + b y^q}$, dont l'intégration dépend de celle des quantités binomes à une seule variable.

Mais si j'avois $g x dx = a x^4 y dy + 2 a b x^2 y^3 dy + a b b y^5 dy$; on voit d'abord facilement, qu'on peut l'écrire ainsi, $g x dx = (x^4 + 2 b x^2 y^2 + b b y^4) a y dy$. On voit ensuite qu'on peut lui donner cette autre forme, $g x dx = (x^2 + b y^2)^2 \times a y dy$. Or avec un peu d'attention, on voit que la séparation réussira, si l'on fait $x^2 + b y^2 = z$; en effet, on aura $x^2 = z - b y^2$, & $x dx = \frac{1}{2} dz - b y dy$; donc substituant on aura

$\frac{1}{2}g\,dz - bgy\,dy = azzy\,dy$. Equation d'où l'on tire $\frac{\frac{1}{2}g\,dz}{bg + azz} = y\,dy$, qui est facile à intégrer.

141. Comme on ne peut donner de règles générales sur les transformations, nous nous bornerons à quelques cas généraux, dans lesquels on sait que la séparation réussit.

On peut séparer généralement, dans toutes les équations homogènes à deux variables; c'est-à-dire, dans celles où les deux indéterminées x & y, ont dans chaque terme, soit qu'elles se trouvent ensemble, soit qu'elles soient seules, la même somme de dimensions.

En effet, concevons que $A\,dx + B\,dy = 0$, soit une équation homogène, & que l'on divise tout par une puissance de x, dont l'exposant soit égal au nombre des dimensions de l'équation; il est facile de sentir qu'il n'y aura plus dans A & dans B, que des puissances de $\frac{y}{x}$ & des constantes; ensorte que l'équation sera $F\,dx + F'\,dy = 0$, F & F' étant des fonctions de $\frac{y}{x}$ & de constantes. Cela posé, puisque $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{xx}$, on aura $dx = \frac{-xx}{y}\,d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y}\,dy$; donc si l'on fait $\frac{y}{x} = z$, on aura $dx = -\frac{y\,dz}{zz} + \frac{dy}{z}$, substituant donc pour $\frac{y}{x}$, & pour dx leurs valeurs, on

aura $-\frac{F'y\,dz}{zz}+\frac{F\,dy}{z}+F\,dy=0$, F & F' étant actuellement des fonctions de z & de constantes. Or cette équation donne $\frac{dy}{y}=\frac{F\,dz}{Fz+F'zz}$, équation toute séparée, puisque F & F' ne renferment plus d'autre variable que z.

Par exemple, si j'avois $y^3\,dx+y^2x\,dy+bx^3\,dy=0$; qui est homogène, & dont le nombre des dimensions est 3; je diviserois par x^3, & j'aurois $\frac{y^3}{x^3}\,dx+\frac{y^2}{x^2}\,dy+b\,dy=0$; faisant donc $\frac{y}{x}=z$, ou $x=\frac{y}{z}$, j'aurois $dx=\frac{z\,dy-y\,dz}{zz}$; substituant dans l'équation proposée, il vient $z^2\,dy-yz\,dz+z^2\,dy+b\,dy=0$; d'où je tire $\frac{dy}{y}=\frac{z\,dz}{2z^2+b}$, dont l'intégrale est $ly=\frac{1}{4}l(2z^2+b)+lC$, qui donne $y=C(2z^2+b)^{\frac{1}{4}}$, ou $y^4=C^4\,(2z^2+b)$, ou enfin $y^4=C^4\left(\frac{2y^2}{x^2}+b\right)$, en remettant pour z, sa valeur $\frac{y}{x}$.

142. Il seroit donc avantageux de pouvoir rendre les équations homogènes. On n'a pas de méthode générale pour cela. Il faut avoir recours aux transformations. Celles qui peuvent promettre quelque succès, consistent à égaler une des variables, ou une fonction de cette variable, ou même une fonction des deux, à une fonction d'une nouvelle

variable avec des exposans indéterminés. On détermine ensuite ces exposans, par la condition que l'équation transformée soit homogène.

Par exemple, si je veux chercher des cas où l'équation $ax^m dx + by^n x^q dy + cy^k dy = 0$ à laquelle on peut réduire toute équation à trois termes, si je veux, dis-je, chercher des cas où elle puisse devenir homogène, je ferai $x = z^h$; alors j'aurai $ahz^{mh+h-1}dz + by^n z^{qh} dy + cy^k dy = 0$. Or, il faut, pour que celle ci soit homogène, que l'on ait $k = qh + n$, & $k = mh + h - 1$, d'où l'on tire $h = \frac{n+1}{m-q+1}$, & $k = \frac{mn+q+n}{m-q+1}$; ainsi, si les exposans k, q, m & n sont tels que cette dernière équation ait lieu ; on pourra rendre l'équation homogène, & par conséquent séparer.

Des Quantités & des Équations différencielles du second, troisième, &c. ordre.

143. La liberté que l'on a (19) de prendre pour constante, dans une différenciation, l'une quelconque des différences premieres, peut contribuer dans beaucoup de cas, à faciliter l'intégration. Mais comme il peut arriver que lors de la différenciation, on ait fait constante, la différencielle qui n'est pas la plus propre à faciliter l'intégration il faut commencer par montrer comment on peut

ramener une équation différencielle dans laquelle on a ſuppoſé telle ou telle différence conſtante, à une autre où il n'y en ait plus aucune de conſtante; on ſera le maître enſuite de ſuppoſer conſtante, celle que l'on voudra.

Soit donc $Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 + Dddy = 0$, l'équation à deux variables & à différences ſecondes, dans laquelle la première différence dx d'une des variables a été ſuppoſée conſtante. Après avoir diviſé cette équation par dx, on l'écrira ainſi, $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + Dd\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, qui eſt en effet la même, parce que tant qu'on ſuppoſe dx conſtant, $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ eſt égal à $\frac{ddy}{dx}$. Mais ſi l'on ne veut plus que dx ſoit conſtant, alors $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - yddx}{dx^2}$; l'équation ſe change donc en $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = 0$, dans laquelle il n'y a plus aucune différence conſtante.

Soit $Adx^3 + Bdx^2dy + Cdy^2dx + Ddy^3 + Edxddy + Fdyddy + Gd^3y = 0$, l'équation à différences troiſièmes, dx étant toujours conſtant.

On diviſera par dx^2, & l'on aura $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D\frac{dy^3}{dx^2} + E\frac{ddy}{dx} + F\frac{dy}{dx}\frac{ddy}{dx} + G\frac{d^3y}{dx^2} = 0$, que l'on pourra écrire ainſi, $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} +$

$\frac{D\,dy^3}{dx^2} + E\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) + F\,\frac{dy}{dx} \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) +$

$G\,d\left[\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$; & faisant tout varier dans ces différenciations indiquées, on aura l'équation où il n'y aura plus de différencielle constante.

Appliquons cela à un exemple. Soit $dx^2\,dy - dy^3 = a\,dx\,ddy + x\,dx\,ddy$, dans laquelle on ait supposé dx constant ; on ne voit pas, sur le champ, comment cette équation pourroit être intégrée ; mais si nous rendons dx variable, en écrivant $dx\,dy - \frac{dy^3}{dx} =$ $(a\,dx + x\,dx)\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, alors nous pouvons, dans cette différenciation indiquée, prendre dy pour constante, & nous aurons $dx\,dy - \frac{dy^3}{dx} = -(a\,dx + x\,dx)$ $\frac{dy\,ddx}{dx^2}$, qui, en réduisant, devient $dx^2 + x\,ddx + a\,ddx - dy^2 = 0$, dont l'intégrale, ainsi qu'il est aisé de le voir, est $x\,dx + a\,dx - y\,dy + C\,dy = 0$, en ajoutant une constante $C\,dy$ de même ordre que l'intégrale. Cette équation étant intégrée de nouveau, donne $\frac{1}{2}x^2 + a\,x - \frac{1}{2}y^2 + C\,y + C' = 0$.

144. La règle que nous avons donnée (123) pour intégrer les quantités différencielles à plusieurs variables s'applique aux quantités différencielles ddx, ddy, d^3x, d^3y, &c. comme autant de variables différentes.

Ainsi, si l'on proposoit d'intégrer $x^3\,y^2\,ddy +$

$2x^3ydy^2 + (2x^3y + 3y^2x^2)\, dxdy + 2y^2xdx^2$, dans laquelle dx est supposé constant ; j'intégrerois d'abord en regardant ddy seule comme variable, & j'aurois x^3y^2dy. J'en prends donc la différencielle qui est $3x^2y^2dxdy + 2x^3ydy^2 + x^3y^2ddy$, que je retranche de la proposée ; il me reste $2x^2ydxdy + 2y^2xdx$. J'intègre en regardant y seule comme variable ; il me vient x^2y^2dx. Je différencie cette quantité, & je retranche du premier reste, la différencielle $2x^2ydydx + 2x^2y^2dx$ que me donne cette différenciation ; comme il ne reste rien, j'en conclus que l'intégrale de la quantité proposée est $x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx$, en ajoutant une constante Cdx de même ordre que l'intégrale.

145. Quant aux équations différencielles, on les intégrera de même, lorsqu'elles seront intégrables dans l'état où elles seront proposées ; ce que l'on reconnoîtra si en procédant à l'intégration, comme il vient d'être dit, le dernier reste est zéro.

Mais si le dernier reste n'étoit pas zéro, il ne faudroit pas, pour les équations, en conclure qu'elles ne sont pas intégrables. Comme on ne change rien à une égalité, en multipliant ou divisant les deux membres par une même quantité, il peut se faire qu'il y ait une quantité qui multipliant ainsi l'équation la rende intégrable.

La recherche générale de ce facteur est un objet dont nous ne pouvons nous occuper ici. On parvient à le trouver dans plusieurs cas assez

étendus, mais nous nous bornerons à donner sur un cas qui se rencontre assez souvent dans plusieurs questions Physico-mathématiques, une idée de la manière dont on doit procéder dans cette recherche. Il s'agit des équations de cette forme, $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$ ou $d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, ou en général, $d^ny + ad^{n-1}ydx + bd^{n-2}ydx + \ldots mydx^n + Xdx^n = 0$, dans lesquelles dx est supposé constant. a, b, c, &c. étant des coëfficiens constans, & X une fonction quelconque de X.

Toutes ces équations deviennent intégrables par la multiplication par un facteur composé de x & de constantes; voici comment on trouve ce facteur.

Prenons l'équation $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$, on décomposera le terme $adydx$ en deux autres $kdydx$ & $(a - k)dydx$, & l'on aura l'équation $ddy + kdydx + (a - k)dydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$. On supposera que k étant une constante indéterminée, il ne manque à l'équation pour être intégrable, que d'être multipliée par un facteur P, qui soit une fonction de x & de constantes.

Cela posé, l'équation $Pddy + Pkdydx + P(a - k)dydx + Pbydx^2 + PXdx^2 = 0$, doit donc, par la supposition, être intégrable. Je l'écris ainsi, $Pddy + Pkdxdy + [P(a - k)dy + Pbydx + PXdx]dx = 0$.

Or la condition que cette équation soit intégrable, exige

(128) que les trois équations suivantes aient lieu.

1°. $\frac{dP}{dy} = \frac{d(Pkdx)}{ddy}$;

2°. $\frac{dP}{dx} = \frac{d[P(a-k)dy + Pbydx + PXdx]}{ddy}$;

3°. $\frac{d(Pkdx)}{dx} = \frac{d[P(a-k)dy + Pbydx + PXdx]}{dy}$;

or la première équation donne $0 = 0$, par la supposition que P & k ne renferment ni y ni dy. La seconde, par la même supposition, donne $\frac{dP}{dx} = P(a-k)$, & la troisieme donne $\frac{Pdk + kdP}{dx} = Pb$, ou seulement $\frac{kdP}{dx} = Pb$, puisque k est supposée une constante.

Tirant de chacune de ces équations la valeur de $\frac{dP}{P}$, on a $\frac{dP}{P} = (a-k)dx$, & $\frac{dP}{P} = \frac{bdx}{k}$; égalant ces deux valeurs, on a $a - k = \frac{b}{k}$, ou $kk - ak + b = 0$. On aura donc k par une équation du second degré, c'est-à-dire, qu'on aura deux valeurs de k. Représentons ces deux valeurs par m & m', on aura donc, 1°. $\frac{dP}{P} = \frac{bdx}{m}$, & par conséquent $\log. P = \frac{bx}{m}$, ou $P = e^{\frac{bx}{m}}$; l'équation $Pddy +$ &c. deviendra donc $ddye^{\frac{bx}{m}} + mdydxe^{\frac{bx}{m}} + (a-m)dydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}} = 0$. Pour procéder à l'intégration, je prends d'abord (144), l'intégrale du terme $ddye^{\frac{bx}{m}}$, en regardant ddy seul

comme variable; & j'ai $dye^{\frac{bx}{m}}$. Différenciant & retranchant de l'équation, on a pour reste . . . .

$(m + a - \frac{b}{m} - m)dydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} +$

$Xdx^2e^{\frac{bx}{m}}$. Mais l'équation $kk - ak + b = 0$, qui n'est autre chose que $mm - am + b = 0$, donne $a - \frac{b}{m} - m = 0$, on a donc pour la quantité qui reste à intégrer; $mdydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}}$. Prenons-en l'intégrale en regardant y seule comme variable, & nous aurons $mydxe^{\frac{bx}{m}}$ pour le second terme de l'intégrale. Différenciant & retranchant du premier reste, il reste

$Xdx^2e^{\frac{bx}{m}}$, dont nous représenterons généralement l'intégrale par $dx\int Xdx^2e^{\frac{bx}{m}}$, qui ne renfermant qu'une variable, ne dépend que des méthodes du calcul à une seule variable; ainsi l'intégrale est $dye^{\frac{bx}{m}} +$ $mydxe^{\frac{bx}{m}} + dx\int Xdxe^{\frac{bx}{m}} = C$, ou $dy + mydx +$ $dxe^{\frac{-bx}{m}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m}} = Ce^{\frac{-bx}{m}}$; mais comme il n'y a pas de raison qui détermine à employer une valeur de k plutôt que l'autre, en employant la seconde que nous avons représentée par m', nous aurons également $dy + m'ydx + dxe^{\frac{-bx}{m'}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m'}} = C'e^{\frac{-bx}{m'}}$, en représentant par C' la constante qui répond à l'intégration que suppose la nouvelle valeur m' de k.

Egalant les deux valeurs de dy, que donnent ces

deux équations, on en conclura enfin ....

$$y = \frac{Ce^{\frac{-bx}{m}} - C'e^{\frac{-bx}{m'}} + e^{\frac{-bx}{m}} \int X dx e^{\frac{bx}{m}} - e^{\frac{-bx}{m'}} \int X dx e^{\frac{bx}{m'}}}{m - m'}.$$

146. Si l'équation étoit du troisième ordre, on s'y prendroit d'une manière semblable.

Par exemple, si on avoit $d^3 y + a ddy dx + b dy dx^2 + c y dx^3 + X dx^3 = 0$, on écriroit $d^3 y + k ddy dx + (a - k) ddy dx + k' dy dx^2 + (b - k') dy dx^2 + c y dx^3 + X dx^3 = 0$, k & k' étant inconnues, mais constantes, & on supposeroit qu'il ne manque à cette équation, pour être intégrable, que d'être multipliée par un facteur P qui ne renferme que des x & des constantes; c'est-à-dire, on supposeroit que l'équation $P d^3 y + P k ddy dx + P(a - k) ddy dx + P k' dy dx^2 + P(b - k') dy dx^2 + P c y dx^3 + P X dx^3 = 0$. est intégrable. Donnant à cette équation la forme suivante......................

$$P d^3 y + P k dx ddy + [P(a-k) ddy + P k' dy dx] \times dx + [P(b - k') dy dx + P c y dx^2 + P X dx^2] dx = 0.$$

la condition qu'elle est intégrable, donneroit (128) six équations, qui par la supposition que l'on a faite pour k, k' & P, se réduiroient à trois; & l'équation finale donneroit pour k trois valeurs, & trois valeurs correspondantes pour k' & pour P. Ce qui, en imitant le procédé ci-dessus, donneroit trois équations en y, x, dx, dy & ddy. Eliminant donc ddy & dy, on auroit la valeur finie de y en x & constantes.

147. On voit à présent ce qu'il y auroit à faire pour les degrés supérieurs.

La même méthode s'appliqueroit s'il y avoit un plus grand nombre de variables qui ne passassent pas le premier degré, & qui ne fussent multipliées ni entr'elles, ni par quelqu'une des différencielles de ces variables, si ce n'est par la différencielle qui est supposée constante.

Par exemple, si on avoit les deux équations $addy + bddz + cdydx + edzdx + fydx^2 + gzdx^2 + Xdx^2 = 0$, & $a'ddy + b'ddz + c'dydx + e'dzdx + f'ydx^2 + g'zdx^2 + X'dx^2 = 0$.

On commenceroit par les ramener à une seule en ajoutant la premiere avec la seconde multipliée par un coëfficient indéterminé & constant q. Puis dans l'équation totale, on partagera le terme où entre dy & celui où entre dz en deux parties, comme il a été fait ci-dessus; enfin on multiplieroit par un facteur supposé une fonction de x & de constantes.

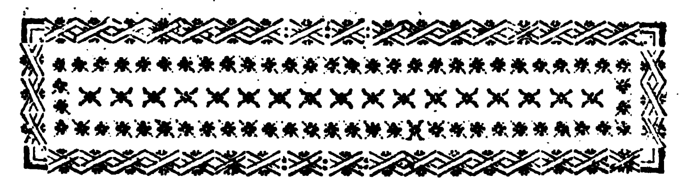
148. Nous terminerons ce qui regarde les équations différencielles, en observant que lorsque dans une équation à deux variables il manque une des deux variables finies, on peut toujours la ramener aux différences de l'ordre immédiatement au-dessus; & cela en égalant la différence première d'une des variables à la différence de la seconde multipliée par une nouvelle variable.

Par exemple, si j'avois à intégrer $\frac{ddy}{dy} \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})} = (ay + b)dx$, dans laquelle dx est supposée constante; & où il manque la variable x; je ferois $dy = pdx$; j'aurois

j'aurois $ddy = dpdx$, & par conséquent...............

$\frac{dp}{p}\sqrt{(1+pp)} = (ay+b) \cdot \frac{dy}{p}$ ou $dp\sqrt{(1+pp)}$ $= (ay+b)\,dy$; dont le second membre s'intègre algébriquement, & le premier, en partie algébriquement & en partie par logarithmes, en rendant $\sqrt{(1+pp)}$ rationnel, d'après ce qui a été dit (117).





PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

149. SOUS le nom de *Mécanique*, nous comprenons la ſcience du Mouvement, & celle de l'Equilibre.

Il y a du mouvement dans un corps, lorſque ce corps, ou quelques-unes de ſes parties ſont tranſportées d'un lieu en un autre.

Un corps, ou l'aſſemblage de pluſieurs parties matérielles, ne peut de lui-même ſe mettre en mouvement. Il ne peut être mu que par une cauſe, ſans laquelle il peut, d'ailleurs, exiſter.

Cette cauſe, telle qu'elle ſoit, qui eſt capable

de mouvoir un corps, eſt ce que nous appellons *Force* ou *Puiſſance*.

L'équilibre, eſt l'état d'un corps ou d'un aſſemblage ou *Syſtème* de corps, qui eſt ſollicité par pluſieurs forces dont les effets ſont détruits par quelques obſtacles, ou ſe détruiſent mutuellement.

Le repos, eſt l'état d'un corps dont les parties, non-ſeulement ne ſont point déplacées, mais ne ſont pas même ſollicitées par aucune force.

Pour établir les principes du mouvement & de l'équilibre, nous imaginerons, d'abord, qu'il n'exiſte rien autre choſe dans la Nature que les corps dont nous parlerons, & les forces que nous leur ſuppoſerons appliquées.

Ainſi nous regarderons d'abord les corps comme non peſans, comme parfaitement libres; nous ſuppoſerons que ni l'air, ni la peſanteur, ni le frottement, ni tout autre obſtacle n'exiſtent.

Nous aurons, enſuite, égard à ces obſtacles; mais pour meſurer leurs effets, il faut commencer par examiner les choſes, dans cet état de ſimplicité.

150. Ces ſuppoſitions faites, il eſt clair que ſi un corps a reçu du mouvement par une cauſe quelconque, il doit perſévérer dans cet état de mouvement, ſans aucune altération ni augmentation, ſans aucun détour, tant que la même ou une

nouvelle force n'agira pas sur lui. En effet, nous venons de dire qu'un corps ne peut se donner du mouvement; il ne peut donc s'en ôter, puisque ce seroit s'en donner en sens contraire; d'ailleurs nous supposons qu'il n'existe aucun obstacle.

Ainsi le mouvement est naturellement égal ou uniforme, & rectiligne. Examinons donc d'abord les propriétés de ce mouvement.

Du Mouvement uniforme.

151. Le mouvement *uniforme* est donc celui d'un corps qui se meut toujours de la même manière; c'est-à-dire, qui parcourt toujours le même espace dans le même intervalle de temps.

Pour comparer les mouvemens de deux corps qui se meuvent uniformément, il faut considérer l'espace que chacun décrit dans un même temps déterminé, comme d'une minute, d'une seconde, &c. Cet espace est ce qu'on appelle la *vîtesse*.

152. La vîtesse d'un corps est donc, à proprement parler, l'espace que ce corps peut décrire uniformément dans un temps déterminé que nous appellons *l'unité de temps*.

Ainsi, dans les mouvemens uniformes de deux corps, si l'on compte le temps en secondes, & que l'un parcoure 5 pieds par seconde, & l'autre 6 pieds par seconde; je dirai que la

vîteſſe du premier eſt de 5 pieds, & celle du ſecond de 6 pieds.

Mais ſi, en prenant toujours la ſeconde, pour unité de temps, on me diſoit qu'un corps a parcouru 100 pieds en cinq ſecondes; 100 pieds n'exprimeroient pas la vîteſſe; mais je vois qu'à chaque ſeconde, il en parcourroit le cinquième, ou 20 pieds; c'eſt-à-dire, que pour avoir la vîteſſe, je diviſe le nombre 100, des parties de l'eſpace parcouru, par le nombre 5 des unités de temps qui ſe ſont écoulées.

153. Donc, en général, la *vîteſſe eſt égale à l'eſpace diviſé par le temps;* c'eſt-à-dire, en nommant V la vîteſſe, E l'eſpace parcouru pendant un temps marqué par T, on a généralement $V = \frac{E}{T}$; c'eſt un des principes fondamentaux de la Mécanique.

154. L'équation $V = \frac{E}{T}$, donne non-ſeulement la meſure de la vîteſſe, mais encore celle de l'eſpace & du temps. En effet, ſi l'on regarde ſucceſſivement E & T comme inconnues, on aura par les règles ordinaires de l'Algèbre, $T = \frac{E}{V}$, & $E = VT$. Ainſi, *pour avoir le temps, il faut diviſer l'eſpace par la vîteſſe; & pour avoir l'eſpace, il faut multiplier la vîteſſe par le temps.*

Au reſte, ſi nous employons ici des caractères algébriques, ce n'eſt pas qu'ils ſoient néceſſaires pour faciliter l'intelligence de ces premières vérités.

Mais ils ſont utiles pour ſoulager la mémoire. On voit en effet par cet exemple, que le premier principe étant une fois dans la mémoire, on peut toujours facilement retrouver les deux autres, en appliquant les règles ordinaires à ce premier principe traduit algébriquement.

155. Il eſt donc facile maintenant de comparer les mouvemens uniformes de deux, ou d'un plus grand nombre de corps.

Par exemple, ſi l'on me demande dans quel rapport ſont les vîteſſes de deux corps, qui décrivent des eſpaces connus E & e, dans des temps connus T & t, reſpectivement. En nommant V & u les vîteſſes de ces deux corps, j'aurai $V = \frac{E}{T}$, & $u = \frac{e}{t}$ (153); donc $V : u :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; c'eſt-à dire, que *les vîteſſes ſont comme les eſpaces diviſés par les temps.*

En un mot, qu'il s'agiſſe de comparer les vîteſſes, ou les eſpaces, ou les temps, le principe que nous venons détablir (153) donnera l'expreſſion de chacune de ces choſes, pour chaque corps; il n'y aura donc qu'à comparer ces expreſſions.

Par exemple, ſi je veux comparer les eſpaces; ce principe me donne $V = \frac{E}{T}$, d'où je tire $E = VT$; donc pour le ſecond corps, j'aurai pareillement $e = ut$; donc $E : e :: VT : ut$; c'eſt-à-dire, que *les eſpaces ſont comme les vîteſſes multipliées par les temps.*

156. De ces trois choses, l'espace, le temps & la vîtesse, si l'on veut en comparer deux, lorsque la troisième est la même pour chaque corps, il n'y a qu'à chercher, de même, l'expression de cette troisième, pour chaque corps, & égaler ces deux expressions.

Par exemple, si je veux savoir quel est le rapport des espaces quand les vîtesses sont les mêmes, j'ai $V = \frac{E}{T}$ & $u = \frac{e}{t}$; donc puisqu'on suppose $V = u$, on a $\frac{E}{T} = \frac{e}{t}$, ou $Et = eT$, d'où l'on tire $E : e :: T : t$; c'est-à-dire, qu'*à vîtesses égales, les espaces sont comme les temps.*

On trouvera de même, qu'*en temps égal, les espaces sont comme les vîtesses*; & que *pour que deux corps décrivent le même espace, il faut que leurs vîtesses soient réciproquement proportionnelles aux temps.* En effet, on a $E = VT$ & $e = ut$; donc si $E = e$, on a $VT = ut$; d'où l'on tire $V : u :: t : T$.

Ainsi, le seul principe $V = \frac{E}{T}$, donne le moyen de comparer toutes les circonstances des mouvemens uniformes.

Des Forces, & de la quantité de Mouvement.

157. La somme des parties matérielles dont un corps est composé, est ce qu'on appelle sa *masse*;

mais dans l'usage que nous ferons de ce mot, nous entendrons le nombre qui exprime de combien de parties matérielles le corps est composé.

La force, ainsi que nous l'avons déja dit, est la cause qui meut, ou tend à mouvoir un corps.

Comme les forces ne nous intéressent que par leurs effets, ce n'est que par les effets dont elles sont capables, que nous devons les mesurer. Or l'effet d'une force est de faire passer dans chaque particule matérielle d'un corps, une certaine vîtesse. Donc si toutes les parties reçoivent la même vîtesse, comme nous le supposerons ici, l'effet de la cause motrice a pour mesure la vîtesse multipliée par le nombre des parties matérielles du corps, c'est-à dire, par la masse. Donc *la force se mesure par la vîtesse qu'elle peut imprimer à une masse connue, multipliée par cette masse.*

158. Le produit de la masse d'un corps, par sa vîtesse, s'appelle la *quantité de mouvement* de ce corps. *Les forces se mesurent donc par la quantité de mouvement qu'elles sont capables de produire.*

Ainsi, si nous désignons ce produit par F, la masse par M, & la vîtesse par V, nous aurons $F = MV$.

Cette équation donne $V = \frac{F}{M}$, & $M = \frac{F}{V}$, qui font voir 1° que *connoissant la force motrice d'un corps & sa masse, on saura quelle vîtesse il doit avoir, en divisant*

la force motrice par la masse. 2°. Que *connoissant la force motrice & la vîtesse, on saura quelle est la masse qui peut avoir cette vîtesse & cette force motrice, en divisant la force motrice par la vîtesse.*

Mais il ne faut pas perdre de vue, que ce que nous entendons ici par F, ou par la force motrice, c'est l'effet dont est capable la cause qui engendre le mouvement. C'est cet effet seul qu'on peut faire entrer, & qu'on a besoin de faire entrer dans le calcul.

159. Donc si f marque la force motrice d'une autre masse m, & u la vîtesse de cette masse, on aura de même $f = mu$; donc $F : f :: MV : mu$; c'est-à-dire, que *les forces motrices sont comme les masses multipliées par les vîtesses.*

Et si de chacune des deux équations $F = MV$, & $f = mu$, on tire les valeurs de M & de m, puis celle de V & de u, on aura le rapport des masses, par celui des forces & des vîtesses, & celui des vîtesses, par les forces & les masses; d'où l'on conclura 1° qu'*à masses égales les forces motrices sont comme les vîtesses;* 2° qu'*à vîtesses égales les forces motrices sont comme les masses;* 3° & qu'enfin *si les forces motrices sont égales, les vîtesses sont en raison inverse des masses;* ce que l'on trouvera facilement en égalant successivement la valeur de M à celle de m, celle de V à celle de u, & enfin celle de F à celle de f; l'équation résultante, réduite & convertie en proportion, démontre chacune de ces propositions.

Remarque.

160. La masse ou le nombre des parties maté-

rielles d'un corps, dépend de ſon volume & de ce qu'on appelle ſa *denſité*. Comme les corps ſont pénétrés d'un très-grand nombre de vides qu'on appelle *pores*, leur quantité de matière n'eſt pas proportionnelle à leur volume; mais ſous le même volume il y a d'autant plus de matière que les parties ſont plus ſerrées; & c'eſt cette plus ou moins grande proximité des parties qu'on appelle *denſité*; enſorte qu'on dit, un tel corps eſt plus *denſe* qu'un tel autre corps, lorſqu'à volume égal il renferme plus de matière que ce dernier. On dit au contraire qu'il eſt moins *denſe* ou plus *rare* lorſqu'à volume égal il renferme moins de matière.

La denſité ſert donc à juger du nombre des parties matérielles, lorſque le volume eſt connu: ainſi on peut regarder la denſité comme repréſentant le nombre des parties matérielles d'un volume déterminé; quand on dit l'or eſt 19 fois auſſi denſe que l'eau, cela veut dire l'or contient 19 fois autant de parties que l'eau, dans un même eſpace.

En ſe repréſentant la denſité comme exprimant le nombre des parties matérielles d'un volume déterminé que l'on prend pour *unité de volume*; il eſt clair que pour avoir la maſſe, ou le nombre total des parties matérielles d'un corps dont le volume eſt connu, il faut multiplier la denſité par le volume.

Par exemple, si la densité d'un pouce cube d'or est représentée par 19, la quantité de matière de 10 pouces cubes d'or, sera 10 fois 19. Ainsi, représentant généralement la masse par M, le volume ou la solidité par S & la densité par D, on aura $M = S \times D$; par où il sera facile de comparer les masses, les volumes & les densités des corps.

Nous verrons dans peu, que les masses des corps sont proportionnelles à leur poids; ainsi, dans l'usage, on pourra substituer le poids à la masse.

Des Mouvemens uniformément accélérés.

161. Un corps qui n'a reçu qu'une impulsion, persévère dans son mouvement avec la même vîtesse, & dans la même direction qu'il a eue au premier instant (150). Mais s'il vient à recevoir une nouvelle impulsion dans le même sens, ou en sens contraire de la première, il se meut alors, avec une vîtesse égale à la somme ou à la différence des deux vîtesses qu'il a reçues successivement; cela est évident.

Donc si l'on conçoit qu'à des intervalles de temps déterminés, le corps reçoive de nouvelles impulsions, dans le même sens, ou en sens contraire de la première, il sera mu d'un mouvement *varié* ou inégal; sa vîtesse sera différente au commencement de chaque intervalle de temps.

Quoi qu'il en soit, sa vîtesse au bout d'un temps quelconque doit s'estimer par l'espace qu'il seroit alors capable de décrire pendant l'unité de temps, si son mouvement devenoit uniforme à compter de l'instant où l'on considère cette vîtesse.

On appelle en général *Force accélératrice*, toute force qui agit sur un mobile pour faire varier son mouvement. Lorsqu'à des intervalles de temps égaux, elle agit également, on l'appelle *force accélératrice constante*, ou *force retardatrice constante*, selon qu'elle tend à augmenter ou à diminuer la vîtesse actuelle du mobile.

Examinons présentement les circonstances du mouvement uniformément accéléré.

162. Puisque dans ce mouvement, la force accélératrice agit toujours de la même manière, si l'on suppose que g soit la vîtesse qu'elle communique, à chaque unité de temps; il est clair que les vîtesses successives du mobile seront g, $2g$, $3g$; ensorte qu'après un nombre d'unités de temps marqué par t, la vîtesse acquise sera g pris autant de fois qu'il y a d'unités dans t; c'est-à-dire, sera $g \times t$ ou gt.

163. Donc 1° dans le mouvement uniformément accéléré, les nombres de degrés de vîtesse que le mobile acquiert, croissent comme les

nombres d'intervalles pendant lesquels dure le mouvement ; ce que l'on exprime, en disant : *Les vîtesses acquises sont comme les temps écoulés depuis le commencement du mouvement.*

Ainsi, si l'on appelle u la vîtesse que le mobile a acquise au bout du temps t, on a $u = g\,t$.

2°. Les vîtesses que le mobile se trouve avoir successivement pendant la durée de chacun des intervalles consécutifs, forment donc une progression arithmétique $\div g, 2g, 3g,$ &c. dont le dernier terme est $g\,t$ ou u, & dont le nombre des termes est t, c'est à-dire, est marqué par le nombre des actions de la force accélératrice.

3°. Et puisque ces vîtesses g, $2g$, &c. ne sont autre chose, chacune, que l'espace que le mobile peut décrire pendant l'intervalle correspondant (151), l'espace total décrit pendant le temps t, sera donc la somme des termes de cette progression arithmétique ; c'est-à dire (*Alg.* 171), qu'il sera exprimé par $(g + u) \times \frac{t}{2}$. Donc si l'on nomme e cet espace total parcouru depuis le commencement du mouvement, on aura $e = (g + u)\,\frac{t}{2}$.

164. Concevons maintenant, que la force accélératrice agit sans interruption, ou, ce qui revient au même, concevons que le temps t soit

partagé en une infinité de parties infiniment petites que nous appellerons des instants; & qu'à la naissance ou à la fin de chaque instant, la force accélératrice donne une impulsion au mobile. Concevons de plus qu'elle agit par degrés infiniment petits. Alors g étant infiniment petite par rapport à u, on doit dans l'équation $e = (g + u)\frac{t}{2}$, omettre g, & l'on a simplement $e = \frac{ut}{2}$.

165. Cela posé, imaginons qu'au bout du temps t, la force accélératrice cesse d'agir; le corps (150) persévérera donc dans son mouvement avec la vîtesse u qu'il aura acquise; c'est-à-dire, qu'à chaque unité de temps, il décrira un espace $= u$ (151); donc s'il continuoit de se mouvoir avec cette même vîtesse pendant le temps t, il décriroit un espace $= u \times t$, c'est-à-dire, le double de celui e ou $\frac{ut}{2}$ qu'il a décrit (164) dans un temps égal, par l'action successive de la force accélératrice. Donc *dans le mouvement uniformément & continuellement accéléré, l'espace décrit, pendant un certain temps, est la moitié de celui que le mobile peut décrire dans un temps égal, avec la vîtesse acquise, continuée uniformément.*

166. Puisque (163) les vîtesses acquises croif-

ſent comme les temps écoulés ; ſi l'on appelle p la vîteſſe acquiſe au bout d'une ſeconde ; alors la vîteſſe acquiſe, après un nombre t de ſecondes, ſera $p\,t$; ainſi on aura $u = p\,t$. L'équation $e = \frac{u\,t}{2}$, trouvée ci-deſſus, deviendra donc $e = \frac{p\,t\,t}{2}$. Donc ſi l'on repréſente par E, un autre eſpace décrit de la même manière pendant un autre temps T, on aura de même $E = \frac{p\,T\,T}{2}$; d'où l'on conclura $e : E :: \frac{p\,t\,t}{2} : \frac{p\,T\,T}{2} :: t\,t : T\,T$; ce qui nous apprend que *les eſpaces parcourus d'un mouvement uniformément & continuellement accéléré, ſont comme les quarrés des temps.*

167. Et puiſque (163) les vîteſſes ſont dans le rapport des temps, *les eſpaces ſont* donc *auſſi dans le rapport des quarrés des vîteſſes.*

168. *Donc les vîteſſes & les temps, ſont comme les racines quarrées des eſpaces parcourus depuis le commencement du mouvement.*

169. Tout cela s'applique également aux mouvemens uniformément retardés, pourvu que, par les temps, on entende ceux qui reſtent à s'écouler juſqu'à l'extinction de la vîteſſe ; & que par les eſpaces, on entende ceux qui reſtent à décrire juſqu'à l'extinction de la vîteſſe.

170.

170. Dans l'équation $e = \frac{pt^2}{2}$ que nous avons trouvée ci-dessus (166), la quantité p par laquelle nous avons entendu la vîtesse que la force accélératrice est capable d'engendrer par son action successive pendant une seconde de temps, est ce que nous appellerons la *force accélératrice*; parce que nous devons juger de cette force par l'effet qu'elle est capable de produire dans le mobile, dans un temps déterminé; effet qui n'est autre que de lui communiquer une certaine vîtesse.

Du Mouvement libre des Corps pesans.

171. C'est à l'espèce de mouvement que nous venons de considérer, qu'on doit rapporter le mouvement des corps pesans. Mais avant d'appliquer à cet objet, la théorie que nous venons d'exposer, il est à propos de faire connoître quelques faits concernant la Pesanteur.

Ce que nous entendons par Pesanteur, c'est la force qui sollicite les corps à descendre suivant des lignes verticales ou perpendiculaires à la surface des eaux. Si la Terre, ou si la surface des eaux étoit parfaitement sphérique, les directions de la pesanteur concourroient toutes au centre. Mais quoique cette surface ne soit pas parfaitement sphérique, elle s'en éloigne peu; en sorte que, pour

les objets que nous avons à traiter, nous pouvons regarder, sans aucune erreur sensible, les directions de la pesanteur, comme concourant au centre de la Terre.

Nous avons déja eu occasion (*Géom.* 338) de dire que le rayon de la Terre, considérée comme sphérique, est de 19605480 pieds. De-là il est aisé de conclure qu'il faut, sur la surface de la Terre, une étendue de 15 toises & $\frac{2}{3}$ pour répondre à un angle d'une seconde au centre de la Terre. Ainsi, dans une machine qui auroit 16 toises de longueur, il ne s'en faudroit que d'un angle d'une seconde, que les directions de la pesanteur, aux deux extrémités, ne fussent parallèles. Donc, *dans un même lieu, on peut regarder les directions de la pesanteur comme parallèles.*

Quant à la grandeur de cette force, à parler rigoureusement, elle est différente à différentes distances de l'Equateur, & à différens éloignemens du centre de la Terre. Mais les quantités dont elle diffère, par les différentes distances où l'on peut être de l'Equateur, sont très-petites, & ne nous importent en aucune manière, pour le présent. Il en est de même des diminutions qu'elle subit à mesure qu'on s'éloigne du centre de la Terre; elles ne peuvent être sensibles que par des changemens de distance beaucoup plus considérables que ne sont

les hauteurs auxquelles nous pouvons nous élever, ou les profondeurs auxquelles nous pouvons descendre; ainsi, nous regarderons ici la pesanteur comme une force qui est par-tout la même, c'est-à-dire, qui sollicite les corps à descendre d'une même quantité dans un même temps.

Il faut considérer cette force comme agissant, & agissant également à chaque instant, sur chaque partie de la matière. Or il est clair que si chacune des parties d'un corps reçoit la même vîtesse, la totalité ne sera mue qu'avec la même vîtesse que recevroit une seule des parties détachée de la masse; en sorte que la vîtesse que la pesanteur imprime à une masse quelconque, ne dépend point de la grandeur de cette masse; elle est la même pour une petite masse que pour une grande. Il est vrai cependant, que nous ne voyons pas tous les corps tomber d'une même hauteur dans le même temps; mais cette différence est l'effet de la résistance de l'air, ainsi que nous le verrons par la suite; aussi lorsqu'on laisse tomber des corps dans un espace vide d'air, observe-t-on que des corps très-différens en masse, tombent néanmoins d'une même hauteur dans le même temps.

Il faut bien distinguer ici, entre l'effet de la pesanteur & celui du poids. L'effet de la pesanteur est de faire passer ou de tendre à faire passer dans

chaque partie de la matière une certaine vîtesse, qui est absolument indépendante du nombre des parties matérielles. Mais le *poids* est égal à l'effort que l'on doit exercer, pour empêcher qu'une masse proposée n'obéisse à sa pesanteur. Or cet effort dépend de deux choses; savoir, de la vîtesse que la pesanteur tend à imprimer à chaque partie, & du nombre de parties qu'elle anime ou qu'elle tend à animer. Mais comme la vîtesse que la pesanteur tend à imprimer, est la même pour chaque partie de la matière, l'effort que l'on a à exercer, est proportionnel au nombre des parties de la matière, c'est-à-dire, à la masse. Ainsi *le poids dépend de la masse, & la pesanteur n'en dépend nullement.* Cette observation, sur le poids des corps, établit ce que nous avons avancé (160), savoir, que la masse est proportionnelle au poids.

172. Après ces éclaircissemens sur la pesanteur, venons aux loix du mouvement des corps pesans.

Puisque la pesanteur agit également, & sans interruption, à quelque distance que le corps se trouve de la surface de la Terre, (du moins pour les distances auxquelles nous pouvons nous élever) la pesanteur est donc une force accélératrice constante, qui, à chaque instant, fait passer dans le mobile un nouveau degré de vîtesse, qui est toujours le même pour chaque instant égal; en sorte

que (163 & *suiv.*) les vîtesses acquises augmentent comme les temps écoulés ; les espaces parcourus sont comme les quarrés des temps, ou comme les quarrés des vîtesses ; les vîtesses sont comme les racines quarrées des espaces parcourus ; les temps sont aussi comme les racines quarrées des espaces parcourus : en un mot, tout ce que nous avons dit des forces accélératrices constantes, s'applique littéralement à la pesanteur. Bien entendu que, dans tout ceci, nous faisons abstraction de la résistance de l'air & de tout autre obstacle.

Il ne s'agit donc, pour pouvoir déterminer les temps, les espaces & les vîtesses dans le mouvement des corps graves, que de connoître un seul effet de la pesanteur dans un temps déterminé. Car les équations $u = pt$, $e = \frac{pt^2}{2}$, nous mettront en état de déterminer tous ces objets, dès qu'une fois nous saurons la valeur de p.

Rappelons-nous donc que par p (166), nous avons entendu la vîtesse que le mobile acquiert au bout d'une seconde de temps. Or on sait par expérience, (& nous verrons par la suite, comment on l'a trouvé) qu'un corps à qui l'air ne fait point de résistance sensible, tombe de 15 pieds & $\frac{1}{10}$, ou plus exactement, de 15 P, 098 dans la première seconde de sa chute.

D'ailleurs nous avons vu (165) qu'avec la vîtesse acquise par une suite d'accélérations, le mobile pourroit décrire d'un mouvement uniforme, un espace double, dans le même temps. Donc la vîtesse qu'un corps pesant a acquis au bout de la première seconde de sa chute, est telle que si la pesanteur cessoit d'agir, il décriroit le double de 15 pieds & $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire 30 P, 2 à chaque seconde. Donc $p = 30{,}2$.

173. Maintenant, l'équation $u = pt$, & l'équation $e = \frac{pt^2}{2}$, nous font voir; la première, que pour avoir la vîtesse qu'un corps pesant a acquise après être tombé pendant un nombre t de secondes, il faut multiplier celle qu'il acquiert pendant la première seconde, par ce nombre t de secondes.

Donc, *lorsqu'un corps pesant est tombé pendant un nombre quelconque de secondes, la vîtesse qu'il a acquise, est telle que si la pesanteur cessoit d'agir, il décriroit, par chaque seconde, autant de fois 30P,2 qu'il s'est écoulé de secondes.*

Ainsi, un corps qui a employé 7 secondes à tomber, se meut au bout de 7 secondes avec une vîtesse à parcourir sept fois 30P,2 ou 211 pieds & $\frac{2}{5}$ par seconde, sans aucune nouvelle accélération.

174. La seconde équation $e = \frac{pt^2}{2} = \frac{1}{2}pt^2$,

fait voir que pour avoir l'espace e ou la hauteur e dont un corps pesant tombe dans un nombre t de secondes, il faut multiplier $\frac{1}{2}p$, c'est-à-dire, la quantité dont il tombe dans la premiere seconde, la multiplier, dis-je, par le quarré du nombre des secondes.

Donc *la hauteur dont un corps pesant tombe pendant un nombre* t *de secondes, est d'autant de fois* 15 *pieds &* $\frac{1}{10}$, *qu'il y a d'unités dans le quarré de ce nombre de secondes.*

Ainsi quand un corps a employé 7 secondes à tomber, on peut être assuré qu'il est tombé de quarante-neuf fois 15P, 1 c'est-à-dire, de 740 pieds à très-peu près; en supposant toujours que la résistance de l'air n'ait pas lieu. On voit donc que quand on connoît le temps écoulé, rien n'est plus aisé que de déterminer la vîtesse acquise & l'espace parcouru.

175. Si l'on veut savoir combien de temps un corps emploieroit à tomber d'une hauteur connue; l'équation $e = \frac{1}{2}pt^2$, donne $t^2 = \frac{e}{\frac{1}{2}p}$, & par conséquent $t = \sqrt{\frac{e}{\frac{1}{2}p}}$; c'est-à-dire, qu'il faut chercher combien cette hauteur e contient de fois la hauteur $\frac{1}{2}p$ dont un corps pesant tombe dans la la première seconde, & tirer la racine quarrée de ce nombre de fois.

176. Veut-on savoir de quelle hauteur un corps

pesant devroit tomber pour acquérir une vîtesse co.nue; c'est-à-dire, une vîtesse à parcourir uniformement un certain nombre de pieds par seconde. Alors de l'équation $u = pt$, je tire la valeur de t qui est $t = \frac{u}{p}$; je la substitue dans l'équation $e = \frac{1}{2}pt^2$; & j'ai $e = \frac{1}{2}p \times \frac{u^2}{pp} = \frac{u^2}{2p}$, qui m'apprend que *pour connoître la hauteur* e *dont un corps pesant devroit tomber pour acquérir une vîtesse* u *d'un certain nombre de pieds par seconde, il faut diviser le quarré de ce nombre de pieds, par le double de la vîtesse qu'un corps pesant acquiert au bout de la première seconde; c'est-à-dire, par 60,4.*

Ainsi, si je veux savoir de quelle hauteur un corps pesant devroit tomber pour acquérir une vîtesse de 100 pieds par seconde, je divise le quarré de 100, c'est-à-dire, 10000, par 60,4; le quotient 165 $\frac{1}{2}$ m'apprend qu'un corps doit tomber de 165 pieds $\frac{1}{2}$, pour acquérir une vîtesse de 100 pieds par seconde.

Il est évident qu'on se conduiroit de même, pour déterminer à quelle hauteur montera un corps jeté verticalement avec une vîtesse connue.

177. Comme on peut, ainsi qu'on le voit par ces exemples, déterminer facilement toutes les circonstances du mouvement des corps pesans, c'est à ces mouvemens qu'on rapporte le plus commu-

nément tous les autres mouvemens ; en sorte que souvent au lieu de donner immédiatement la vîtesse d'un corps, on donne la hauteur d'où il auroit dû tomber pour acquérir cette vîtesse, par l'action de la pesanteur. Nous aurons occasion d'en voir des exemples.

Observons donc pour récapituler, que toutes les circonstances du mouvement accéléré, & par conséquent du mouvement des corps graves, sont comprises dans les deux équations $u = pt$, $e = \frac{1}{2}pt^2$; en sorte que p étant connu, dès que l'on connoîtra l'une de ces trois choses, le temps, l'espace & la vîtesse, on peut toujours trouver les deux autres, soit immédiatement par l'une ou l'autre de ces deux équations, soit par le concours des deux, combinées comme nous venons de le faire (176).

Des Mouvemens variés de quelque manière que ce soit.

178. Lorsque le mobile est soumis à l'action d'une force qui agit sur lui sans interruption, mais d'une manière différente à chaque instant, le mouvement s'appelle, en général, *mouvement varié*. On a des exemples de mouvement varié dans le

action continuée & toujours égale. Dans l'équation $du = p\,dt$, on doit entendre la même chofe. Mais il faut obferver que la force accélératrice étant fuppofée variable, la quantité p qui repréfente la vîteffe qu'elle feroit capable d'engendrer fi elle agiffoit comme force accélératrice conftante pendant une feconde, cette quantité p eft différente pour tous les inftans du mouvement. En effet, on conçoit aifément que lorfque la force accélératrice devient plus petite, la vîteffe qu'elle feroit capable d'engendrer dans une feconde, par fon action actuelle répétée également pendant chaque inftant de cette feconde, doit être plus petite, & *vice verfa*.

182. Les deux équations $de = u\,dt$, $du = p\,dt$, peuvent en fournir une troifième que l'on emploie encore avec avantage; la voici.

De l'équation $de = u\,dt$, on tire $dt = \frac{de}{u}$; fubftituant cette valeur dans l'équation $du = p\,dt$, on a, toute réduction faite, $p\,de = u\,du$.

183. Remarquons, que dans le raifonnement par lequel nous fommes parvenus à l'équation $du = p\,dt$ (180), nous avons regardé la vîteffe comme croiffante. Si elle alloit en diminuant, il faudroit (21), au lieu de du, mettre $-du$; en forte que les deux équations $du = p\,dt$, &

$pde = udu$ doivent être écrites ainsi . . . . $\pm du = pdt$, & $pde = \pm udu$, le ſigne ſupérieur étant pour le mouvement accéléré; & le ſigne inférieur, pour le mouvement retardé.

184. Il y a une quatrième équation qu'on peut déduire des deux équations fondamentales, & qu'il ne faut pas omettre; la voici.

L'équation $de = udt$, donne $u = \frac{de}{dt}$; donc $du = d\left(\frac{de}{dt}\right)$. Subſtituant cette valeur dans l'équation $pdt = \pm du$, on a $pdt = \pm d\left(\frac{de}{dt}\right)$.

Si l'on ſuppoſe (comme on en eſt bien le maître) que dt ſoit conſtant, on a $pdt = \pm \frac{dde}{dt}$, ou $pdt^2 = \pm dde$. Mais il faut bien ſe ſouvenir que l'équation $pdt^2 = \pm dde$ ſuppoſe dt conſtant. Lorſqu'on fait dt variable, on emploie l'équation $pdt = \pm d\left(\frac{de}{dt}\right)$.

Nous aurons plus d'une occaſion d'appliquer utilement ces formules. Mais ne perdons pas de vue que la quantité p qu'elles renferment, repréſente, pour chaque inſtant, la vîteſſe que la force accélératrice feroit capable de faire naître dans le mobile, dans un intervalle de temps connu, comme d'une ſeconde, ſi pendant cette ſeconde elle agiſſoit

comme force accélératrice constante ; en sorte que, comme cette quantité p mesure, pour chaque instant, l'effet dont la force accélélatrice est capable, nous lui donnerons, pour abréger, le nom de *force accélératrice.*

De l'Équilibre entre des forces directement opposées.

185. Nous venons de considérer le mouvement que doit avoir un corps soumis à l'action d'une force qui agit sur lui, toujours suivant une même direction. Mais nous n'avons pas encore fait mention de la manière dont le mouvement passe dans le mobile. C'est un objet qu'il n'est pas moins important d'examiner ; mais comme les loix de la communication du mouvement, dépendent de celles de l'équilibre, ainsi que nous le verrons par la suite, il faut commencer par nous occuper de celles-ci. Il n'est question, pour le présent, que de l'équilibre entre des forces directement opposées.

Nous représenterons les forces, ainsi que nous l'avons déja dit, par les effets qu'elles sont capables de produire ; c'est-à-dire, chacune, par la quantité de mouvement d'une masse déterminée. Mais pour ne point embrasser trop d'objets à-la-fois, nous considérerons ces masses comme réduites chacune

à un seul point, auquel, par la pensée, nous attribuerons la même quantité de matière qu'au corps dont il tiendra lieu. Nous verrons, par la suite, qu'il y a, en effet, dans tous les corps, un point par lequel le mouvement se transmet, comme si toute la masse y étoit concentrée. Au surplus, nous considérerons les corps (jusqu'à ce que nous avertissions du contraire) comme composés de parties absolument dures & liées les unes aux autres de manière à ne pouvoir changer leurs situations respectives, par l'action d'aucune force.

186. Cela posé, concevons (*fig.* 27) deux masses M & m; la première, mue de A vers C avec une vîtesse V; la seconde, mue de C vers A, avec une vîtesse u; lorsque ces deux masses viendront à se rencontrer, elle se feront équilibre si la quantité de mouvement de M est égale à celle de m; c'est-à-dire (158), si $MV = mu$.

En effet, il est d'abord évident que si M est égal à m, & qu'en même temps les deux vîtesses V & u soient égales, il y aura équilibre; car alors la même raison que l'on donneroit pour prouver que M doit l'emporter sur m, prouveroit aussi que m doit l'emporter sur M, puisque tout est égal de part & d'autre.

Supposons présentement que M est double de m; mais qu'en même temps u est double

de *V*; que, par exemple, *M* parcoure un pied par seconde, & *m* deux pieds par seconde. Il est clair que je puis considérer *M* comme composé de deux masses égales à *m*; & qu'à l'instant du choc je puis me représenter le corps *m* comme animé d'une vîtesse d'un pied par seconde, à laquelle on ajoute dans le même instant une autre vîtesse d'un pied par seconde. Alors je puis me représenter que dans le choc, la masse *m* consume une de ses vîtesses contre une pareille portion de la masse *M*; & son autre vîtesse contre la portion égale & restante de la masse *M*.

Maintenant, si au lieu de supposer les masses *M* & *m*, dans le rapport de 2 à 1, & au contraire leurs vîtesses dans le rapport de 1 à 2, on les supposoit dans tout autre rapport, on voit qu'on pourroit toujours supposer la plus grande masse décomposée en un certain nombre de masses égales à la plus petite, dont chacune détruit dans la plus petite une vîtesse égale à la sienne, en sorte qu'on peut établir comme général, le principe suivant.

PRINCIPE FONDAMENTAL. *Deux corps qui agissent l'un sur l'autre, suivant des lignes directement opposées, se font équilibre, lorsque leurs quantités de mouvement sont égales*; c'est-à-dire, lorsque le produit de la masse de l'un, par la vîtesse avec laquelle il tend à se mouvoir, est égal au produit de la

de la masse de l'autre par la vîtesse avec laquelle il tend aussi à se mouvoir.

Cette proposition a lieu généralement, soit qu'il s'agisse de deux corps qui marchent librement au-devant l'un de l'autre, soit qu'il soit question de deux corps qui se poussent à l'aide d'une ligne Mm inflexible & sans masse; soit enfin qu'ils se tirent en sens contraires, à l'aide d'un fil inextensible Mm. Et réciproquement, si deux corps se font équilibre, on doit conclure que leurs mouvemens sont directement opposés, & que leurs quantités de mouvement sont égales.

187. Donc si trois, ou un plus grand nombre de corps M, m, m', &c. (*fig.* 28) qui se meuvent ou tendent à se mouvoir sur une même ligne, avec des vîtesses V, u, u', se font équilibre; il faut que la somme des quantités de mouvement de ceux qui agissent dans un sens, soit égale à la somme des quantités de mouvement de ceux qui agissent en sens contraire.

Car s'ils se font équilibre, on peut toujours supposer que M & m allant du même sens, m détruit une partie du mouvement de m', & que M détruit l'autre. Or si l'on nomme x la vîtesse que m' perd par l'action de m; on aura $m'x$ pour la quantité de mouvement qu'il perd par cette même action; on aura donc $mu = m'x$; le corps M n'aura donc plus à détruire dans m' que la quanti-

tité de mouvement restante ; savoir, $m'u' - m'x$; on aura donc $MV = m'u' - m'x$; ou à cause que $m'x = mu$, on aura $MV = m'u' - mu$; c'est-à-dire, $MV + mu = m'u'$.

Du Mouvement composé.

188. Nous supposerons encore que les masses auxquelles seront appliquées les forces dont nous allons parler, sont concentrées en un point.

On appelle *mouvement composé*, celui que prend un corps sollicité en même temps par plusieurs forces qui ont telles directions qu'on voudra.

Si un corps *M* mu suivant la ligne droite *AB* (*fig.* 29) reçoit, lorsqu'il est arrivé ou point *M* une impulsion suivant une ligne *MD* perpendiculaire à la ligne *AB* ; cette impulsion ne peut produire d'autre effet que de l'écarter de la ligne *AB* ; elle ne peut ni augmenter ni diminuer la vîtesse qu'il avoit pour s'éloigner de *CD* perpendiculairement à cette ligne.

En effet, la direction *CD* étant perpendiculaire à *AB*, il n'y a aucune raison pour que la force qui agit suivant *CD*, produise un effet plutôt à la droite qu'à la gauche de cette ligne ; & comme elle ne peut en produire des deux côtés à la fois, elle n'en produira donc ni de l'un ni de l'autre.

Le raisonnement est le même, si l'on suppose que le corps *M* étant mu suivant *CD*, vient à être frappé suivant

MB; cette dernière force n'ajoutera ni n'ôtera rien à la vîteſſe avec laquelle le corps *M* tendoit à s'éloigner de *MB*.

189. PRINCIPE FONDAMENTAL. *Si deux ſorces* P *&* Q (fig. 30) *dont les directions font un angle droit, agiſſent au même inſtant ſur un mobile* M; *que la force* Q *ſoit telle, que par ſon action inſtantanée ſur le mobile, elle puiſſe ſeule lui faire parcourir* MB *dans un temps déterminé comme d'une ſeconde; & la force* P, *telle qu'elle puiſſe ſeule lui faire parcourir* MD *dans le même temps; je dis que par l'action compoſée de ces deux forces, le mobile* M *décrira, dans le même temps, la diagonale* ME *du parallélogramme* DMBE *qui a pour côtés ces mêmes lignes* MB, MD.

Puiſque les deux forces agiſſent au même inſtant ſur le mobile, on peut ſuppoſer qu'il étoit en mouvement ſur la ligne *PD*, & qu'au moment où il arrive au point *M*, la force Q perpendiculaire à *PD*, vient agir ſur lui; or ſelon ce qui vient d'être dit (188) cette force Q ne peut ni augmenter ni ralentir la vîteſſe qu'il avoit pour s'éloigner de *QB*; donc ſi par le point *D* on tire *DE* parallèle à *MB*, il faudra qu'au bout d'une ſeconde il ſe trouve ſur quelque point de la ligne *DE* dont tous les points ſont eloignés de *QB*, d'une quantité égale à *MD*.

Or le même raisonnement que nous faisons pour la force P à l'égard de la force Q, s'applique mot à mot à la force Q par rapport à la force P; donc si par le point B on tire BE parallèle à PD, le corps doit, au bout d'une seconde, se trouver sur quelque point de BE. Mais il n'y a que le point E qui soit tout-à-la-fois sur DE & sur BE; donc le mobile, au bout d'une seconde, sera en E.

Il est d'ailleurs évident (150) que quelque route que le mobile prenne par l'action instantanée des deux forces, elle doit être une ligne droite; puisque dès qu'elles ont agi, le mobile est abandonné à lui-même; donc puisque cette route doit passer par M & par E, elle doit être ME, c'est-à-dire, la diagonale du parallélogramme $DMBE$.

Ajoutons que le mobile décrit ME d'un mouvement uniforme, puisqu'immédiatement après l'action composée des deux forces, il est abandonné à lui-même. (150).

190. Puisque les deux forces P & Q agissant conjointement sur le mobile, n'ont d'autre effet que de lui faire décrire la diagonale ME; concluons donc 1°. qu'à deux forces dont les directions font un angle droit, on peut toujours en substituer une seule, pourvu que celle-ci puisse faire parcourir au

mobile, la diagonale d'un parallélogramme rectangle, dont les côtés feroient décrits dans le même temps chacun féparément par l'action de la force dont il eft la direction.

La force unique *ME* qui réfulte de l'action des deux forces *MB*, *MD*, s'appelle la *réfultante* de ces deux forces.

Comme les lignes *MB*, *MD*, repréfentent les effets dont les forces Q & *P* font capables féparément, & *ME* celui dont elles font capables conjointement, on peut regarder *MB*, *MD*, *ME* comme repréfentant ces forces elles-mêmes.

2°. On pourra donc auffi confidérer une force unique quelconque *ME*, comme étant le réfultat de deux autres forces *MB*, *MD*, dont les directions feroient entr'elles un angle droit, pourvu que celle-là étant repréfentée par la diagonale *ME*, ces deux-ci le foient par les côtés *MB*, *MD* d'un même parallélogramme rectangle. On pourra donc à la force unique *ME*, fubftituer les deux forces *MB* & *MD*; puifqu'en effet ces deux forces ne produiroient que *ME*.

191. En général, *quelque angle que faffent entr'elles les directions des deux forces* P *&* Q (fig. 31 & 32) *qui agiffent en même temps fur un mobile* M; *ce mobile décrira la diagonale* ME

du parallélogramme DMBE, *dont les côtés marquent sur les directions de ces forces, les effets dont elles sont capables séparément; & il décrira cette diagonale, dans le même temps que par l'action de l'une quelconque de ces deux forces, il eût décrit le côté qui représente cette dernière force.*

En effet, concevons que par le point *M*, on mène F*MH* perpendiculaire à la diagonale *ME*; & que par les points *D* & *B* on mène les lignes *DF*, *BH* parallèles, & les lignes *DG*, *BI* perpendiculaires à cette même diagonale. Au lieu de la force *P* représentée par *MD* diagonale du parallélogramme rectangle *FMGD*, on peut (190) prendre les deux forces *MF* & *MG*. Par la même raison; on peut, au lieu de la force Q représentée par la diagonale *MB* du parallélogramme rectangle *MHBI*, prendre les deux forces *MH* & *MI*. On peut donc, aux deux forces *P* & *Q*, substituer les quatre forces *MF*, *MG*, *MH*, *MI*; & celles-ci ne peuvent manquer d'avoir la même résultante que ces deux-là. Or de ces quatre forces, les deux *MH*, *MF*, ne contribuent en rien à la résultante, parce qu'elles agissent suivant des directions opposées, & qu'elles sont égales. En effet, il est aisé de voir que les deux triangles *DGM*, *EIB* sont égaux, par la nature du parallélogramme; donc *DG* = *BI*; donc aussi *MF* = *MH*.

Quant aux deux forces MI, MG, comme elles sont dirigées suivant une même ligne, l'effet qui en résulte, doit être la somme des deux effets MG, MI (*fig.* 31), parce que ces forces agissent dans le même sens ; & doit être leur différence (*fig.* 32), parce qu'elles agissent en sens contraires. Mais puisque le triangle EIB est égal au triangle DGM; on a (*fig.* 31) $MI + MG = MI + EI = ME$; & (*fig.* 32) $MI - MG = MI - EI = ME$; donc les quatre forces MF, MH, MG, MI, & par conséquent les deux forces MD, MB, n'ont d'autre effet que la force ME représentée par la diagonale du parallélogramme $DMBE$, dont les deux côtés MB, MD représentent les deux forces Q & P.

192. Nous avons, dans ce qui précède, représenté les deux forces P & Q (*fig.* 30, 31 & 32) par les lignes MD, MB qu'elles seroient capables de faire décrire dans un même temps, au mobile M, c'est-à-dire, par les vîtesses qu'elles peuvent lui communiquer, quoique, selon ce que nous avons dit (158) la mesure véritable des forces, doit être la quantité de mouvement qu'elles sont capables de produire. Mais comme les quantités de mouvement (159) sont dans le rapport des vîtesses, quand la masse est la même, ainsi que dans le cas présent ; on peut toujours prendre, comme nous l'avons

fait, les vîtesses MD, MB, pour représenter ces deux forces.

Mais si au lieu d'avoir immédiatement les vîtesses que les deux forces P & Q peuvent engendrer dans le mobile M, on avoit les quantités de mouvement qu'elles peuvent produire dans des masses connues, alors on prendroit MD & MB, dans le rapport de ces quantités de mouvement. Par exemple, si je ne connoissois les forces P & Q, que par ce caractère ; que la force P est capable d'engendrer une vîtesse connue u, dans une masse connue m ; & que la force Q est capble d'engendrer une vîtesse connue u', dans une masse connue m' ; alors je prendrois $MD : MB :: mu : m'u'$. Car, selon ce que nous venons de voir, il faut prendre $MD : MB$ dans le rapport des vîtesses que ces deux forces peuvent imprimer au mobile M ; or la première étant capable d'engendrer la quantité de mouvement mu, est capable de donner au mobile M la vîtesse $\frac{mu}{M}$ (158) ; par la même raison, la seconde, ou la force Q est capable de donner au mobile M, la vîtesse $\frac{m'u'}{M}$: il faudroit donc prendre $MD : MB :: \frac{mu}{M} : \frac{m'u'}{M}$; mais $\frac{mu}{M} : \frac{m'u'}{M} :: mu : m'u'$; donc, il faut en effet, faire $MD : MB$ dans le raport des quan-

tités de mouvement qui mesurent les forces P & Q.

Cette réflexion est utile pour comparer les effets de différentes forces appliquées à différens mobiles.

La proposition générale que nous venons de démontrer (191), est d'une très-grande utilité; presque tout ce que nous dirons par la suite, n'en sera qu'une application.

193. On voit donc qu'il est absolument indifférent de regarder un corps comme sollicité par l'action combinée des deux forces MB, MD (*fig.* 31 & 32), qui font entr'elles tel angle qu'on voudra, ou de le regarder comme sollicité par l'action unique de la force représentée par la diagonale ME.

Et réciproquement, il revient absolument au même, de considérer un corps comme sollicité par une force unique ME, ou de le considérer comme sollicité en même temps par deux forces qui seroient représentées par les côtés d'un parallélogramme, dont celle-là seroit la diagonale. Par exemple, qu'un corps parvienne de M en E, par un mouvement uniforme, en une seconde de temps; ou bien qu'il se meuve sur la ligne MB, de manière à la parcourir dans une seconde de temps, & qu'en même temps cette ligne soit transportée parallèlement à elle-même le long de MD, & qu'elle parcoure MD aussi dans une seconde, le corps dans ce

fecond mouvement fe trouvera également ne décrire autre chofe que la ligne *ME*.

194. Les deux forces *MB*, *MD* fe rencontrant au point *M*, font néceffairement dans un même plan (*Géom.* 177). Puis donc qu'elles ont pour réfultante la diagonale *ME*, qui eft dans le plan du parallélogramme, on peut dire généralement, que *deux forces qui fe rencontrent, font toujours dans un même plan avec leur réfultante.*

De la Compofition & de la Décompofition des Forces.

195. Non-feulement on peut, par le principe que nous venons d'expofer, réduire à une feule, deux forces qui concourent, & décompofer une force en deux antres; mais on peut, en général, réduire à une feule force, tant d'autres forces que l'on voudra, lorfqu'elles font dans un même plan, ou lorfqu'elles fe rencontrent toutes en un même point. Et réciproquement, on peut décompofer une ou plufieurs forces, en tel autre nombre de forces que l'on voudra.

196. Mais avant de faire voir comment on y parvient, il faut obferver que lorfqu'une force *P*, (*fig.* 33) agit fur un corps, foit pour le pouffer,

ſoit pour le tirer, il importe peu à quel point de la direction de cette force, on ſuppoſe que ſon action ſoit appliquée.

Par exemple, c'eſt la même choſe, que la force P tire le corps C par le point P à l'aide d'une verge inflexible & ſans maſſe, ou d'une fil inextenſible & ſans maſſe; c'eſt la même choſe, dis-je, qu'elle le tire par le point P ou qu'elle le tire par le point A, ou par le point B, ou par le point C, ou qu'elle le pouſſe par tout autre point D lié avec ce corps. Tant que ſont action s'exercera ſuivant la même direction, elle aura toujours le même effet. La diſtance ne peut influer qu'autant que l'action de la puiſſance ſe tranſmettroit à l'aide de quelque inſtrument, comme lévier on corde, dont la maſſe partageroit l'action de la puiſſance; ce que nous excluons ici.

Ainſi, ſi deux forces P & Q (*fig.* 34) dirigées dans un même plan, ſuivant les lignes AQ, BP, tirent ou pouſſent un corps par les deux points A & B; ce corps n'eſt pas autrement ſollicité qu'il le feroit, ſi les deux forces le tiroient toutes deux par leur point de concours I, en reſtant toujours dirigées de la même manière.

Cela poſé, venons à la compoſition & à la décompoſition des forces.

197. Suppoſons quatre forces P, Q, R, S (*fig.* 35) dirigées ſuivant les lignes OP, AQ, BR, TS, toutes dans un même plan. Prolongeons

d'abord, par la penſée, la direction $P\,O$, juſqu'à ce qu'elle rencontre $A\,Q$, au point A; & ſuppoſant que $A\,D$, $A\,E$ ſont les eſpaces que les deux forces P & Q pourroient reſpectivement faire décrire à un même mobile, dans un temps déterminé, comme d'une ſeconde; ſi l'on forme le parallélogramme $A\,E\,I\,D$, la diagonale $A\,I$ repréſentera (191) l'effort réſultant des deux forces P & Q, & pourra par conſéquent tenir lieu de ces deux forces.

Concevons maintenant que $A\,I$ prolongée rencontre en B la direction $B\,R$ de la force R; & ayant pris $B\,M$ égale à $A\,I$, ſi l'on prend $B\,F$ pour l'eſpace que la force R eſt capable de faire décrire en une ſeconde, au même mobile que ci-deſſus; alors ſuppoſant la force $A\,I$ appliquée en B; puiſque cette force eſt repréſentée par $B\,M = A\,I$, de ſon concours d'action avec la force R, il réſultera une force unique repréſentée par la diagonale $B\,G$ du parallélogramme $B\,M\,G\,F$; cette force tiendra donc lieu de la force R & de la force $A\,I$; c'eſt-à-dire, tiendra lieu des trois forces R, Q & P.

Enfin concevons que $B\,G$ prolongée rencontre en C, la direction $T\,S$ de la force S; & faiſons $C\,K = B\,G$; ſuppoſons que $C\,H$ repréſente l'eſpace que la force S peut faire décrire dans une ſeconde, au même mobile que ci-deſſus; alors

concevant la force *B G*, appliquée en *C* ſuivant *C G*, & repréſentée par *C K*; du concours de cette force avec la force *S*, il réſultera un effort unique repréſenté par la diagonale *C N* du parallélogramme *C H N K*. Cette force tiendra donc lieu de la force *S* & de la force *C K* ou *B G*; elle tiendra donc lieu des quatre forces *P*, Q, *R*, *S*; elle eſt donc la réſultante de ces quatre forces.

On voit donc par-là, qu'on peut toujours, & comment on peut réduire à une ſeule force, tant de forces que l'on voudra, lorſqu'elles ſont dirigées dans un même plan.

198. Cet exemple fait voir en même tems, comment on peut, à une ſeule force, en ſubſtituer tant d'autres que l'on voudra, & quelles conditions ces autres doivent avoir.

Par exemple (*fig.* 35) au lieu de la force unique *B G*, on peut, en formant un parallélogramme quelconque *B F G M*, dont *B G* ſoit la diagonale, prendre deux forces repréſentées par *B F* & *B M*. Et comme on peut ſuppoſer chacune de ces deux forces appliquées à tel point de leur direction que l'on voudra, on peut tranſporter *B M* en *A I* le point *A* étant à telle diſtance qu'on voudra de *B*, & former ſur *A I* un autre parallélogramme quelconque *A E I D*; alors on peut ſubſtituer à la force *A I*, deux forces repréſentées par *A E* & *A D*; enſorte qu'à la force unique *B G*, on aura ſubſtitué les trois forces *B F*, *A E*, *A D* qui produiront le même effet que celle-là.

199. Remarquons que puiſqu'il n'y a d'autre condition pour déterminer les forces *AD*, *AE*, ſinon qu'elles ſoient exprimées par les côtés *AD*, *AE* du parallélogramme *ADIE*, dont *AI* feroit la diagonale, ce qui peut avoir lieu d'une infinité de manières, ſoit que le parallélogramme *ADIE* ſoit dans le plan du parallélogramme *FBMG*, ou qu'il ſoit dans tout autre plan ; on peut décompoſer une force quelconque *BG*, en tant d'autres qu'on voudra, & qui ſoient dans tels plans qu'on voudra.

Nous verrons par la ſuite l'uſage de ces compoſitions & décompoſitions de forces.

200. On voit, par l'exemple de décompoſition que nous venons de donner, qu'on peut aſſujettir, ſi on le veut, quelques-unes des forces à paſſer par certains points donnés, & même à être d'une grandeur déterminée : à être parallèles à certaines lignes données ; en un mot, à ſatisfaire à certaines conditions données.

Par exemple, ſi l'on avoit une force repréſentée par la ligne *AB* (*fig.* 36), & qu'on voulût ſubſtituer à cette force, deux autres, dont l'une paſsât par un point donné *O*, fût parallèle à une ligne donnée de poſition *ST*, & fût en même-temps d'une certaine grandeur *SK* ; c'eſt-à-dire, telle qu'elle pût faire décrire *SK* à un mobile, dans le même temps que la force repréſentée par *AB*, feroit décrire au même mobile la ligne *AB* ; voici comment on

satisferoit à cette question, d'après les principes précédens.

Par le point O, on mèneroit OV parallèle à ST, & qui rencontreroit AB en quelque point V. On prendroit $VR = SK$, & $VQ = AB$ alors menant RQ, on lui mèneroit par le point V, la parallèle VH, que l'on termineroit en H, par la ligne QH parallèle à VR; VR seroit la force demandée, & VH seroit celle qui, conjointement avec VR, tiendroit lieu de VQ ou de AB.

La solution que nous donnons, ne cesse d'avoir lieu que lorsque la ligne ST est parallèle à AB; mais on verra dans peu ce qu'il y a à faire dans ce cas.

201. Remarquons que puisque les deux forces composantes P & Q (*fig.* 31 & 32) étant représentées par les deux côtés MD, MB du parallélogramme $DMBE$, leur résultante doit nécessairement être représentée par la diagonale ME du même parallélogramme, on a, en nommant R cette résultante, $P : R :: MD : ME$, & $Q : R :: MB : ME$, c'est-à-dire, $P : Q : R :: MD : MB : ME$, ou (à cause que $MD = BE$) $:: BE : MB : ME$. Or dans le triangle MBE, on a (*Géom.* 303) $BE : MB : ME ::$ sin BME : sin. BEM : sin. MBE; ou à cause des parallèles BE & MD qui donnent l'angle $BEM = DME$, & l'angle MBE supplément de BMD, & par conséquent (*Géom.* 279)

sin. MBE = sin. MBD, on a $BE : MB : ME$: : sin. BME : sin. DME : sin. BMD; donc $P : Q : R$: : sin. BME sin. DME : sin. BMD; où l'on voit que si l'on suppose la force P exprimée par sin. BME, la force Q le sera par sin. DME; la force R le sera par sin. BMD; c'est-à-dire, que *deux forces composantes & leur résultante, peuvent toujours être représentées chacune, par le sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.*

Ainsi on peut employer indifféremment pour représenter les forces, ou des lignes prises sur leurs directions, ou les sinus des angles compris entre leurs directions, pourvu qu'on prenne pour chacune le sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.

Cette dernière manière d'exprimer les forces, a aussi ses avantages particuliers, comme nous le verrons par la suite.

202. Si du point M comme centre (*fig.* 37 & 38), & d'un rayon quelconque ME', on décrit l'arc de cercle $HE'G$ qui rencontre en G & H les directions prolongées des forces P & Q; & que du point E' on mène $E'F$, $E'I$, perpendiculaires sur MD, MB; & du point H, HL perpendiculaire sur MD. Il est facile de voir que

$E'F$,

EF, *E'I*, *HL*, sont respectivement les sinus des angles *DME*, *BME*, & *BMD*; on a donc *P* : *Q* : *R* : : *E'I* : *E'L* : *HL*.

203. Concevons maintenant que les directions des deux forces *P* & *Q* (*fig.* 39 & 40), passant constamment par deux points fixes *K* & *N*, leur point de concours *M* s'éloigne de plus en plus; il est visible que les sinus des angles *BME*, *DME* & *BMD* diminueront de plus en plus *; que par conséquent ils approcheront, de plus en plus, de se confondre avec les arcs *E'H*, *E'G*, *GH*; donc si le point *M* s'éloigne à l'infini, *E'F*, *E'I* & *HL* se trouvent tous appliqués sur l'arc *GH* qui devient une ligne droite perpendiculaire aux deux lignes *MK* & *MN*, qui pour lors sont parallèles entre elles & à la ligne *ME*; & puisqu'on a toujours *P* : *Q* : *R* : : *E'I* : *E'F* : *HL*; *HL* devenant alors égale à *E'I* + *E'F* (*fig.* 39) & = *E'I* — *E'F* (*fig.* 40), il s'ensuit que *lorsque deux forces* P *&* Q (fig. 41 & 42) *ont des directions parallèles*, 1° *leur résultante leur est parallèle*. 2°. *Que si on tire une ligne* FI *perpendiculaire à ces directions, chacune de ces forces est représentée par la partie de cette perpendiculaire, comprise entre*

* Il faut se rappeller (*Géom.* 179) que le sinus d'un angle obtus, est le même que celui de son supplément.

les directions des deux autres. 3°. La résultante est égale à la somme des deux composantes, lorsque celles-ci agissent dans un même sens ; & égale à leur différence, lorsqu'elles agissent en sens contraires.

204. Puisque l'on a (*fig.* 41 & 42) $P : Q : R :: EI : FE : FI$ on a donc $P : Q :: EI : FE$ & $P : R :: EI : FI$, c'est-à-dire, que *des deux composantes parallèles, & leur résultante, deux quelconques sont toujours entr'elles réciproquement comme les deux perpendiculaires menées sur leur direction, d'un même point pris sur la direction de la troisième.*

205. Si l'on tire arbitrairement la ligne ABC, on aura (*Géom.* 102) $BC : AB : AC :: EI : FE : FI$. On aura donc aussi $P : Q : R :: BC : AB : AC$; c'est-à-dire qu'en général, *si l'on coupe les directions de deux forces parallèles, & de leur résultante, par une ligne droite menée comme on le voudra, chacune de ces forces peut toujours être représentée par la partie de cette droite, comprise entre les directions des deux autres.*

206. De-là il est aisé de conclure comment on doit s'y prendre pour trouver la résultante de plusieurs forces parallèles ; & réciproquement, pour substituer à une force quelconque, tant d'autres forces parallèles que l'on voudra.

Par exemple, s'agit-il de réduire à une seule, les deux forces P & Q (*fig.* 41) qui agissent dans le même sens? Je mène la ligne quelconque ABC; la résultante R doit être égale à $P + Q$ (203) : il ne s'agit donc que de trouver le point B, par où elle doit passer. Or (205) on a $P : R :: BC : AC$; c'est-à-dire $P : P + Q :: BC : AC$; il faudra donc prendre entre les deux points A & C, un point B tel que l'on ait $BC = \frac{P \times AC}{P + Q}$.

Si les deux forces agissent en sens contraires (*fig.* 42), la résultante sera égale à leur différence (203), c'est-à-dire, sera $P - Q$, ou $Q - P$. Supposons P plus grand que Q. Ayant tiré arbitrairement la ligne AC, il faudra la prolonger au-delà de A par rapport à C d'une quantité AB, telle que l'on ait $P : R :: BC : AC$ (205), ou $P : P - Q :: BC : AC$; c'est-à-dire, qu'il faudra prendre $BC = \frac{P \times AC}{P - Q}$.

Si Q étoit plus grand que P, le point B seroit sur le prolongement de AC, au-delà de C par rapport à A.

207. Si l'on avoit une troisième force K (*fig.* 43); alors après avoir trouvé la résultante R des deux forces P & Q, on chercheroit la résultante S des deux forces R & K, comme s'il n'y avoit eu que ces deux-ci; c'est à-dire, précisément comme on vient de l'enseigner dans l'article précédent.

208. Donc réciproquement, si l'on vouloit décomposer une force quelconque R, en deux autres qui lui fussent parallèles (*fig.* 41 & 42).

On prendroit arbitrairement une ligne BF parallèle à la direction de la force R; & ayant pris cette ligne pour la direction de l'une des composantes, on prendra arbitrairement pour

la valeur de cette composante, une quantité quelconque P plus petite que R, si l'on veut que les deux composantes agissent de part & d'autre de la force R; alors la seconde composante, que j'appelle Q, doit être égale à $R - P$; & pour avoir sa position, il ne s'agit plus que de mener la ligne quelconque CBA, & de prendre sur le prolongement de AB, la partie BC telle que l'on ait $Q : P :: AB : CB$; si par le point C on mène QC parallèle à RB, ce sera la direction de la force Q.

Mais si l'on veut que les deux composantes soient d'un même côté, auquel cas elles doivent agir en sens contraires; alors on peut prendre pour P, une quantité quelconque, plus petite ou plus grande que R, & ayant pris une ligne PF (*fig.* 42) parallèle à RB, pour la direction de P, on prendra sur la ligne quelconque BAC, le point C de manière que l'on ait $P - R$ ou $R - P : R :: AB : AC$; le point C sera celui par où doit passer la force Q parallèle à la force donnée R; & ce point C sera au-delà de A par rapport à B, si P est plus grand que R; au contraire si P est plus petit que R, il sera entre A & B.

209. Ce que nous disons ici de la force R, à l'égard de ses composantes P & Q, pouvant évidemment s'appliquer à chacune de ces deux-ci, on voit donc comment on peut substituer à une force quelconque, tant d'autres forces que l'on voudra, dont les directions soient parallèles.



Des Momens, & de leur usage pour la composition & la décomposition des Forces.

210. Ce que nous venons de dire suffit pour composer & décomposer les forces, quelques directions & quelques valeurs qu'elles aient, au moins quand elles agissent dans un même plan. Mais les différentes sortes de mouvemens que nous aurons à considérer, exigent des moyens plus simples & plus expéditifs pour déterminer la résultante des forces, & sa direction; nous allons nous en occuper actuellement.

211. *Si d'un point quelconque* F (fig. 44 & 45) *pris dans le plan d'un parallélogramme quelconque* ABCD, *on mène les lignes* EF, FH, FG, *perpendiculaires sur les côtés contigus* AB, AD *& la diagonale* AC; *la somme des produits de chaque perpendiculaire, par le côté sur lequel elle tombe, sera égale au produit de la diagonale par la perpendiculaire qui tombe sur elle, lorsque le point* F (fig. 44) *ne sera ni dans l'angle* BAD, *ni dans son opposé au sommet. Au contraire* (fig. 45) *si le point* F *est dans l'angle* BAD, *ou dans son opposé au sommet, ce sera la différence des produits de chaque perpendiculaire, par le côté sur lequel elle tombe, qui sera égale au produit de la dia-*

gonale par la perpendiculaire qui tombe sur cette diagonale.

Prolongeons le côté BC, jusqu'à ce qu'il rencontre en I la perpendiculaire FH; menons les lignes FA, FB, FC, FD. Le triangle FAC (*figure* 44) est $= FAB + ABC + FBC = FAB + ADC + FBC$. Or, 1°. le triangle $FAC = \frac{AC \times FG}{2}$. 2°. Le triangle $FAB = \frac{AB \times FE}{2}$. 3°. Le triangle ADC ayant AD pour base, & IH pour hauteur, est $= \frac{AD \times IH}{2}$. 4°. Le triangle $FBC = \frac{BC \times FI}{2} = \frac{AD \times FI}{2}$; donc $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AB \times FE}{2} + \frac{AD \times IH}{2} + \frac{AD \times FI}{2}$; or $IH + FI = FH$; donc, & en doublant tout, on a $AC \times FG = AB \times FE + AD \times FH$.

Dans la *fig.* 45, le triangle $FAC = ABC - FAB - FBC = ADC - FAB - FBC$; c'est-à-dire, $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AD \times IH}{2} - \frac{AB \times FE}{2} - \frac{BC \times FI}{2}$; ou (en faisant attention que $BC = AD$, & que $IH - FI = FH$, & en doublant tout) on a $AC \times FG = AD \times FH - AB \times FE$.

212. Puisque nous avons démontré ci-dessus,

que deux forces quelconques, & leur réſultante, peuvent être repréſentées par les côtés & la diagonale d'un parallélogramme formé ſur leurs directions, concluons donc que ſi P & Q (*fig.* 44 & 45) ſont deux forces repréſentées par les lignes AB, AD, auquel cas leur réſultante R ſera repréſentée par AC; concluons, dis-je, que ſi l'on prend hors de l'angle BAD & de ſon oppoſé au ſommet, un point quelconque F, dans le plan de ces trois forces, on aura toujours $R \times FG = Q \times FH + P \times FE$; & que lorſque le point F ſera pris dans l'angle BAD ou dans ſon oppoſé au ſommet, on aura toujours $R \times FG = Q \times FH - P \times FE$.

213. Le produit d'une force par la diſtance de ſa direction à un point fixe, eſt ce qu'on appelle le *moment* de cette force. Ainſi $Q \times FH$, eſt le moment de la force Q; $R \times FG$, eſt le moment de la force R.

214. Comme les forces s'eſtiment (158) par la quantité de mouvement, c'eſt-à-dire, par le produit d'une maſſe déterminée, multipliée par la vîteſſe qu'elles ſont capables de communiquer à cette maſſe, le moment d'une force quelconque, a donc pour valeur le produit d'une maſſe par ſa vîteſſe, & par la diſtance de ſa direction à un point fixe.

215. Si on conçoit que les perpendiculaires

FH, *FG*, *FE*, ſoient des lignes inflexibles & ſans maſſes, liées entr'elles & fixées au point *F*, de manière à ne pouvoir que tourner autour de ce point; & que les forces P, Q & leur réſultante *R*, ſoient appliquées aux extrémités *E*, *H*, *G*; on voit que (*fig.* 44) ces trois forces tendent toutes à faire tourner le ſyſtème dans un même ſens autour du point *F*; & (*fig.* 45) les deux forces *Q* & *R* tendent à faire tourner le ſyſtème dans un ſens différent de celui ſelon lequel la force *P* tend à le faire tourner.

On peut donc dire que *le moment de la réſultante, pris par rapport à un point fixe quelconque* F, *eſt toujours égal à la ſomme ou à la différence des momens des deux compoſantes, ſelon que celles-ci tendent à faire tourner dans un même ſens, ou dans des ſens oppoſés, autour de ce point fixe.*

216. De-là on peut conclure en général, que *quelque nombre de forces* P, Q, S, T, *&c.* (fig. 46) *que l'on ait; quelques grandeurs, & quelques directions qu'elles aient, pourvu qu'elles ſoient toutes dans un même plan; le moment de la réſultante de toutes ces forces, pris par rapport à tel point* F *qu'on voudra, pris dans ce plan, ſera toujours égal à la ſomme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un ſens autour de*

ce point, moins la somme des momens de celles qui tendent à faire tourner en sens contraire.

En effet, si l'on suppose que r soit la résultante des deux forces P & Q, dirigées suivant AP & EQ; r' celle de r & de S qui agit suivant GS; & enfin R celle de r' & de T, qui agit suivant DT; que l'on suppose de plus, que m soit le moment de r; m' celui de r'. Alors en abaissant les perpendiculaires FA, FE, FG, FD, FB, sur les composantes P, Q, S, T & leur résultante R; on aura 1° $m = P \times AF + Q \times EF$. 2°. $m' = m - S \times FG$. 3°. $R \times FB = m' - T \times FD$; donc ajoutant ces trois équations, & détruisant les quantités semblables qui se trouveront dans chaque membre, on aura $R \times FB = P \times AF + Q \times EF - S \times FG - T \times FD$; où l'on voit que les momens des deux forces T & S qui tendent à faire tourner de droite à gauche, sont, en effet, de signe contraire à ceux des forces P & Q, qui tendent à faire tourner de gauche à droite.

217. Si le point F étoit sur la direction même de la résultante, le moment de cetre force seroit alors zéro; donc puisqu'il est égal à la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, moins la somme de celles qui tendent à faire tourner en sens contraire, il faut en conclure

que la différence de ces deux ſommes de momens pris par rapport à un point quelconque de la réſultante, eſt zéro.

Et réciproquement, *ſi la ſomme des momens de pluſieurs forces qui tendent à faire tourner autour d'un point, moins la ſomme des momens de celles qui tendent à faire tourner en ſens contraire autour de ce même point, eſt zéro ; il faut en conclure que la réſultante paſſe par ce point.*

218. Puiſque ces propoſitions ſont généralement vraies, quelques angles que forment entr'elles les directions des forces, elles le ſont donc auſſi, lorſque les forces forment entr'elles des angles infiniment petits, ou, ce qui revient au même, lorſque les directions des forces ſont parallèles entr'elles.

219. De là il eſt aiſé de déduire une méthode fort ſimple pour avoir la poſition & la grandeur de la réſultante de tant de forces que l'on voudra, lorſqu'elles agiſſent toutes dans un même plan.

Suppoſons d'abord qu'elles ſont toutes parallèles entr'elles ; & pour ne point compliquer inutilement cette recherche, ſuppoſons qu'il n'y ait que trois forces, il ſera facile d'en conclure ce qu'on doit faire pour un plus grand nombre.

Soient donc trois forces connues P, Q, S (*fig.* 47), dont les deux premières agiſſent ſuivant

AP, BQ, & la dernière agit ſuivant CS. Ayant tiré arbitrairement une ligne quelconque $FABC$, perpendiculaire aux directions AP, BQ, &c. on imaginera que le point D eſt celui par où doit paſſer la réſultante R. Alors ayant pris arbitrairement un point F ſur $FABC$, on aura, ſuivant ce qui précède, $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$; or les diſtances AF, FB, FC & les forces P, Q, S étant connues, il feroit très-facile de tirer de cette équation la valeur de la diſtance DF à laquelle paſſe la réſultante, ſi la valeur de cette réſultante R étoit connue. Voyons donc quelle eſt la valeur de cette réſultante.

Prenons un autre point F' ſur le prolongement de AF; le même principe nous donnera....... $P \times AF' + Q \times BF' - S \times CF' = R \times DF'$. Or ſi de cette ſeconde équation, on retranche la première, & qu'on faſſe attention que $AF' - AF = FF'$, $BF' - BF = FF'$, $CF' - CF = FF'$, $DF' - DF = FF'$, on aura $P \times FF' + Q \times FF' - S \times FF' = R \times FF'$; c'eſt-à-dire, en diviſant tout par FF', $P + Q - S = R$.

Mais ſi l'on fait attention au raiſonnement que nous venons de faire, il eſt facile de voir qu'il ne dépend nullement du nombre des forces; mais

qu'il est appliquable quel que soit le nombre de ces forces. On doit conclure en général, que *la résultante de tant de forces parallèles que l'on voudra, est égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent dans un sens contraire.*

Si dans l'équation $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$, trouvée d'abord, on met pour R sa valeur $P + Q - S$, que nous venons de trouver, on aura $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = (P + Q - S) \times DF$; d'où l'on tire $DF = \frac{P \times AF + Q \times BF - S \times CF}{P + Q - S}$; d'où, & ayant égard à ce que le raisonnement par lequel nous parvenons à ce résultat, ne dépend pas du nombre des forces, on conclura généralement, que

Pour savoir à quelle distance d'un point donné, passe la résultante de plusieurs forces parallèles ; il faut, de la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, retrancher la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens opposé, & diviser le reste par la somme des forces qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire *.

* Il ne faut pas confondre les forces qui agissent dans des sens opposés, avec celles qui tendent à faire tourner dans des sens opposés. Deux forces qui agissent dans des sens opposés, tendent

220. Si le point F, que l'on a pris d'abord arbitrairement, ſe trouvoit avoir été pris ſur le point D même, par lequel paſſe la force réſultante; alors la diſtance DF étant zéro, ſa valeur.......
$\frac{P \times AF + Q \times BF - S \times CF}{P+Q-S}$ qui devient $\frac{-P \times AD + Q \times BD - S \times CD}{P+Q-S}$
(parce que la force P tend à faire tourner autour du point D en ſens contraire de la force Q) ſeroit zéro; on auroit donc $- P \times AD + Q \times BD - S \times CD = 0$; & comme le point F que l'on avoit pris d'abord arbitrairement, pouvoit être plus haut ou plus bas, ſelon qu'on auroit voulu, enſorte que le point D n'eſt pas cenſé être plutôt ſur un point de la direction de la réſultante R, que ſur tout autre point de la même direction, il s'enſuit généralement que

Les momens de plusieurs forces parallèles pris par rapport à un point quelconque de la direction de la réſultante, ſont tels que la ſomme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un ſens, eſt toujours égale à la ſomme des momens de

ſouvent à faire tourner dans le même ſens; cela dépend du point relativement auquel on conſidère la rotation ou les momens. Par exemple, les deux forces Q & S (*fig.* 47) agiſſent en ſens oppoſés; mais elles tendent toutes deux à faire tourner la ligne BC dans un même ſens, autour d'un point pris entre B & C; & ſi on conſidère la rotation, par rapport au point F, la force Q tend à faire tourner CF, en ſens contraire de ce que tend à faire la force S.

celles qui tendent à faire tourner en sens contraire.

221. Donc, en prenant avec des signes contraires les momens des forces qui tendent à faire tourner dans des sens opposés; & prenant aussi, avec des signes contraires, les forces qui agissent dans des sens opposés, on peut dire généralement,

1°. *La résultante de tant de forces parallèles que l'on voudra, est toujours égale à la somme de toutes ces forces.* 2°. *Cette résultante, qui leur est parallèle, passe par une suite de points dont chacun a cette propriété, que la somme des momens par rapport à ce point, est zéro.*

Nous ferons le plus grand usage de ces principes, & nous verrons dans peu, avec quelle facilité on en déduit la position du centre de gravité des corps. Passons aux forces dont les directions font des angles entr'elles.

222. Soient donc (*fig.* 48) tant de forces *P*, *Q*, *S*, &c. que l'on voudra, toutes dirigées dans un même plan. Que la force *P* agissant suivant *AP*, soit représentée par *AB*; la force *Q*, agissant suivant *EQ*, soit représentée par *EG*; la force *S*, agissant suivant *IS*, soit représentée par *IL*. Par un point *T* pris arbitrairement dans le

plan de ces forces, concevons deux droites indéfinies TE', TE'' faisant entre elles un angle quelconque (que pour plus de simplicité nous supposerons droit); & concevons les forces P, Q, S, ou AB, EG, IL, décomposées, chacune, en deux autres, dont l'une soit parallèle à la ligne TE', & l'autre parallèle à la ligne TE'', & qui par conséquent (193) doivent être représentées, chacune, par le côté correspondant du parallélogramme, dont la diagonale représente la force principale. Il est clair, par ce qui précède (219), que les forces AD, EF, IM * étant parallèles, auront pour résultante une force unique VO qui leur sera parallèle, dont la valeur sera $AD + EF - IM$, & qui passera à une distance VV', telle que $VV' = \frac{AD \times AA' + EF \times EE' - IM \times II'}{AD + EF - IM}$.

Pareillement, les forces AC, EH, IK parallèles à TE'' se réduiront toutes à une seule VN qui leur sera parallèle, qui sera égale à $AC + EH + IK$; & qui (en supposant que V soit le point où la

* Ne perdons pas de vue ce que nous avons dit (192). Par cette expression, *les forces* AB, EG, &c. nous entendons que les lignes AB, EG, &c. sont entr'elles comme les quantités de mouvement que les forces P, Q, &c. peuvent produire dans les masses auxquelles elles sont appliquées. Il en est de même des forces AD, EF, &c. nous entendons des quantités de mouvement qui sont aux quantités de mouvement représentées par AB, EG, comme AD & EF sont à AB & EG respectivement.

direction de cette force, rencontre celle de la force OV) passera à une distance VV'', telle que $VV'' = \frac{AC \times AA'' + EH \times EE'' + IK \times II''}{AC + EH + IK}$.

Cela posé, les forces P, Q, S & leurs directions, (c'est-à-dire, les angles qu'elles font avec des lignes fixes & connues, telles que TE' & TE'', ou avec leurs parallèles) étant supposées connues, on connoît dans chacun des triangles BAD, GEF, IKL, l'hypothénuse & les angles; il sera donc aisé de déterminer les lignes AD, EF, KL ou IM, & les lignes BD ou AC, FG ou EH & IK; par-là on connoîtra les valeurs des deux résultantes $AD + EF - IM$, & $AC + EH + IK$. D'ailleurs comme on ne peut manquer de connoître les distances AA', AA''; EE', EE'', &c. puisqu'on ne peut ignorer la position des points A, E, où l'on suppose les forces appliquées, on connoît donc toutes les quantités qui entrent dans l'expression des distances VV' & VV''. Il sera donc facile de déterminer le point V, où se rencontrent ces deux forces résultantes. Prenant donc $VO = AD + EF - IM$, & $VN = AC + EH + IK$, & formant le parallélogramme $OVNX$, on aura la diagonale VX pour la résultante R des deux résultantes parallèles à TE' & TE'', c'est-à-dire, pour la résultante de toutes les forces proposées.

Des

Des forces qui agissent dans des plans différens.

223. Soient trois forces P, Q, S (*fig.* 49) dirigées suivant les lignes AP, BQ, CS parallèles entr'elles, mais situées dans différens plans.

Concevons un plan XZ auquel les trois droites AP, BQ, CS soient perpendiculaires, & un autre plan ZV auxquelles elles soient parallèles; que A, B, C soient les points où ces lignes rencontrent le plan XZ.

Les deux forces P & S sont dans un même plan dont l'intersection avec le plan XZ, est la droite AC. Ces deux forces peuvent donc être réduites à une seule $R' = P + S$, qui leur soit parallèle & qui passera par un point D, tel que (220) l'on aura $P \times AD = S \times CD$.

Les deux forces R' & Q sont dans un même plan dont l'intersection avec le plan XZ, est BD; elles peuvent donc être réduites à une seule R qui sera égale à $R' + Q$, c'est-à-dire $= P + S + Q$, qui leur sera parallèle, & qui passera par un point E, tel que l'on aura $R \times DE = Q \times BE$. D'où, & de ce qui a été dit ci-devant, il est aisé de conclure, en général, que *tant de forces que l'on voudra, dont les directions sont parallèles, se*

réduisent toujours à une seule égale à la somme de celles que agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire; & cela, soit qu'elles soient toutes dans un même plan, soit qu'elles soient dans des plans différens.

Voyons maintenant plus particulièrement comment on détermine par où passe cette résultante.

Si des points A, D, C, B, E on mène les lignes AA', DD', CC', BB', EE' perpendiculaires sur l'intersection commune des deux plans XZ & ZV; à cause des parallèles AA', DD', CC', on aura $AD:CD::A'D':C'D'$; or l'équation $P \times AD = S \times CD$ que nous venons de trouver, donne $AD : CD :: S : P$; donc $A'D' : C'D' :: S : P$, & par conséquent $P \times A'D' = S \times C'D'$.

Pareillement, les parallèles DD', EE', BB' donnent $DE : BE :: D'E' : B'E'$; or l'équation $R' \times DE = Q \times BE$, que nous avons pareillement trouvée ci-dessus, donne $DE : BE :: Q : R'$; donc $D'E' ; B'E' :: Q : R' :: Q : P + S$: donc $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$.

Prenons maintenant dans l'intersection ZT des deux plans un point fixe T, & cherchons la distance TE' de ce point, au point E' qui correspond au point E par lequel passe la résultante. Il est clair que $A'D' = TD' - TA'$, $C'D' = TC' - TD'$,

$D'E' = TE' - TD'$ $B'E' = TB' - TE'$.
Substituons ces valeurs dans les deux équations $P \times A'D' = S \times C'D'$ & $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$, nous aurons $P \times TD' - P \times TA' = S \times TC' - S \times TD'$, & $(P + S) \times TE' - (P + S)\ TD' = Q \times TB' - Q \times TE'$. Or, de ces deux équations, la première donne $(P + S)\ TD' = P \times TA' + S \times TC'$; substituant cette valeur dans la seconde, on a $(P + S) \times TE' - P \times TA' - S \times TC' = Q \times TB' - Q \times TE'$; rassemblant donc tous les termes multipliés par TE', on aura $(P + Q + S) \times TE' = P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'$. D'où l'on tire $TE' = \frac{P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'}{P + Q + S}$.

Or cette expression de la distance TE', est précisément celle que l'on auroit pour trouver la distance à laquelle passeroit la force résultante, si les trois forces P, Q, S étoient toutes trois dans le plan ZV, & passoient par les points A', C', B', correspondans aux points A, C, B, par lesquels elles passent réellement. Donc si l'on conçoit la droite, TX perpendiculaire au plan ZV, on trouvera la distance TE' de la résultante R, à cette droite, en prenant la somme des momens * à l'égard

* Il faut observer ici, & pour la suite, que par le mot général *somme des momens* on doit entendre la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, moins la

de cette droite, comme ſi toutes les forces, ſans changer de diſtance à cette même droite, étoient toutes dans le plan *ZV* auquel elle eſt perpendiculaire ; & diviſant cette ſomme de momens par la ſomme des forces.

Il ne reſte donc plus, pour fixer le point *E*, que de connoître la diſtance *EE'* ou (en menant *EE''* parallèle à *ZT*) la diſtance *TE''* à laquelle cette même force paſſe, à l'égard de *ZT*. Or il eſt clair, d'après ce que nous venons de dire ſur la diſtance *TE'*, que pour avoir la diſtance *TE''*, il faut de même concevoir un plan paſſant par *XT*, & parallèle aux directions des forces ; prendre la ſomme des momens à l'égard de *TZ*, qui eſt l'interſection de ce plan avec le plan *ZV* ; prendre, dis-je la ſomme des momens à l'égard de *TZ*, comme ſi toutes les forces, ſans changer de diſtance au plan *ZV*, étoient toutes dans le plan *XV* ; & diviſer cette ſomme de momens, par la ſomme des forces. Alors on aura tout ce qu'il faut pour fixer le point *E* par où paſſe la réſultante.

224. Conſidérons maintenant les forces dont les directions ne ſont ni dans un même plan, ni parallèles,

ſomme des momens des forces qui tendent à faire tourner en ſens oppoſés. On doit de même par ce mot *ſomme* des forces, entendre la ſomme de celles qui agiſſent dans un ſens, moins la ſomme de celles qui agiſſent dans l'autre.

Soient (*fig.* 50) *P*, *Q*, *R* trois forces dirigées suivant les lignes *AP*, *BQ*, *CR* situées dans des plans différens. Concevons un plan quelconque *XZ*, rencontré en *H*, par la direction *AP*; en *F*, par la direction *BQ*; & en *L*, par la direction *CR*. Comme on peut (196) supposer une force appliquée à tel point que l'on veut de sa direction, j'imagine ces trois forces appliquées aux points *H*, *F*, *L*, & représentées par les lignes *HV*, *FT*, *LK* prolongemens des lignes *AP*, *BQ*, *CR*, au-dessous du plan *XZ*. Concevons encore que par les droites *AH*, *BF*, *CL*, on ait mené des plans perpendiculaires au plan *XZ*, & dont les intersections avec celui-ci, soient les droites *GHN*, *EFY*, *DLM*. Cela posé, il est évident que je puis décomposer chacune de ces forces en deux autres, dont l'une soit dans le plan *XZ*; & l'autre soit perpendiculaire à ce même plan. Par exemple, je puis décomposer la force *HV*, en une force dirigée suivant *HN*, & une autre force dirigée suivant *HO* perpendiculaire au plan *XZ*. En sorte, qu'aux trois forces *HV*, *FT*, *LK*, je puis substituer les six forces *HN*, *FY*, *LM*, *HO*, *FS*, *LI*, dont les trois premières sont dans le plan *XZ*, & les trois dernières sont perpendiculaires à ce même plan.

Or on peut, par ce qui a été enseigné (222),

réduire les trois forces HN, FY, LM à une seule qui sera aussi dans le plan XZ. Et par ce qui vient d'être dit (223) on peut réduire les trois forces HO, FS, LI, à une seule, qui sera perpendiculaire au plan XZ, Donc en général, *quelque nombre de forces que l'on ait, & quelques directions que ces forces puissent avoir ; on peut toujours les réduire à deux tout au plus, l'une dirigée dans un plan connu, & l'autre perpendiculaire à ce plan.*

225. Quoique la démonstration de cette proposition ne paroisse applicable qu'au cas où toutes les forces rencontrent le plan XZ qu'on a choisi, il est cependant facile de voir qu'elle a généralement lieu. Car si on conçoit qu'après avoir réduit à deux, toutes les forces qui rencontrent ce plan, on vient à changer la position de ce dernier, sans qu'il cesse de rencontrer ces deux résultantes, (ce que l'on peut toujours) alors on pourra toujours lui trouver une position propre à rencontrer les directions de celles qui lui étoient d'abord parallèles.

226. Il n'en est donc pas des forces dirigées dans différens plans, comme de celles qui sont toutes dirigées dans un même plan. Celles-ci peuvent toujours être réduites à une seule, ainsi que nous l'avons vu. Mais celles-là se réduisent à deux, qui ne peuvent être réduites à une seule, que dans le

cas où la résultante des forces qui agissent dans le plan XZ, rencontreroit celle des forces perpendiculaires au même plan.

227. On peut donc, par ce moyen, trouver les deux résultantes de tant de forces que l'on voudra, lorsque ces forces sont dirigées dans des plans différens. Mais quoique ce moyen puisse être utile dans beaucoup de cas, il n'est cependant pas le plus commode pour la résolution de beaucoup de questions; c'est pourquoi nous allons en enseigner un autre.

Soit donc P (*fig.* 51) l'une quelconque des forces proposées, & AB la ligne qui peut la représenter. Soit X un point fixe quelconque; XZ, XY, $X\Gamma$, trois droites perpendiculaires entr'elles. Si sur AB, comme diagonale, on forme le parallélogramme rectangle $ADBC$, dont le plan soit perpendiculaire au plan YXT, & dont le côré BC soit parallèle à XZ; qu'ensuite sur BD comme diagonale, on forme le parallélogramme rectangle $DFBE$ dont le plan soit parallèle au plan YXT, & dont les côtés BF, BE soient parallèles aux droites XT, XY; il est clair 1°. qu'à la force AB, on peut substituer la force BC parallèle à XZ, ou perpendiculaire au plan YXT, & la force BD parallèle à ce même plan. 2°. Qu'à cette force BD,

on peut ſubſtituer la force BE parallèle à XY, ou perpendiculaire au plan ZXT, & la force BF parallèle à XT ou perpendiculaire au plan ZXY; en ſorte que la force P ou AB, ſe trouvera décompoſée en trois forces parallèles à trois lignes perpendiculaires entr'elles, ou, ce qui revient au même, ſe trouvera décompoſée en trois forces perpendiculaires à trois plans qui ſeront perpendiculaires entr'eux.

Or, ce que nous diſons ici de la force P, eſt évidemment applicable à toute autre force qui ne ſera point perpendiculaire à l'un de ces trois plans. Donc ſi on conçoit toutes les forces telles que P, ainſi décompoſées, & qu'on réduiſe enſuite à une ſeule, par la méthode donnée (223), toutes les forces perpendiculaires au plan ZXT; qu'on faſſe la même choſe pour les forces perpendiculaires au plan ZXY; enfin la même choſe pour les forces perpendiculaires au plan YXT, on voit qu'on pourra toujours réduire tant de forces que l'on voudra, dirigées dans différens plans à trois forces perpendiculaires à trois plans qui ſeroient perpendiculaires entr'eux. Tels ſont les principes généraux de la compoſition & de la décompoſition des forces.

Des Centres de gravité.

228. Avant que de nous occuper des effets particuliers que peuvent produire ſur les machines, ou en général ſur les corps d'une ſtructure & d'une matière connue, les forces dont nous venons de conſidérer les propriétés générales, il faut nous arrêter ſur les centres de gravité, dont la connoiſſance importe beaucoup pour la détermination des mouvemens dont ces machines ou ces corps peuvent être ſuſceptibles.

Rappellons-nous, que nous avons dit (171) que les directions ſuivant leſquelles la peſanteur agit ſur les particules matérielles d'un corps, ſont parallèles; & que cette force tend à communiquer à chaque partie de matière, la même vîteſſe dans le même temps.

229. On appelle *centre de gravité* d'un corps, ou d'un *ſyſtême* de corps, (c'eſt-à-dire d'un aſſemblage quelconque de corps) le point de ce corps par où paſſe la force réſultante des forces particulieres dont chaque partie de ce corps ou de ce ſyſtême ſeroit animée par l'action naturelle de la peſanteur, dans quelque ſituation qu'on mette ce corps, ou ce ſyſtême.

Par exemple, ſi dans la poſition actuelle du triangle

ABC (*fig.* 52) la force résultante des actions de la pesanteur sur toutes les parties de ce triangle, passe par un certain point *G* de la surface; & que dans une autre situation *abc*, elle passe encore par le même point *G*, ce point *G* s'appelle le centre de gravité. Nous verrons dans peu, que cette résultante passe toujours par le même point, dans toutes les situations possibles du corps.

230. La détermination de ce centre est facile, après ce que nous avons dit sur l'usage des momens pour trouver la résultante de plusieurs forces parallèles.

En effet, soient *M*, *N*, *P* (*fig.* 53) tant de corps que l'on voudra, dont (pour ce moment) nous considérerons les masses comme concentrées aux points *B*, *A*, *C* que nous supposerons d'abord dans un même plan. Soit *p* la vîtesse que la pesanteur tend à imprimer à chacun dans un instant, & qui (171) est la même pour chacun. Alors $p \times M$ ou pM, pN, pP feront les quantités de mouvement, ou les forces avec lesquelles ces corps tendent à se mouvoir suivant les directions parallèles $C''C$, $B''B$, $A''A$. Or, suivant ce que nous avons dit (219), pour avoir la position de la force résultante, il faut prendre la somme des momens à l'égard d'un point quelconque *T* pris sur une ligne perpendiculaire à ces directions, & diviser cette somme, par la somme des forces; on aura donc, pour la valeur de la distance TG'' à laquelle passe cette résultante, on

aura, dis-je, $TG''=\frac{pM\times TB''+pN\times TA''+pP\times TC''}{pM+pN+pP}$, qui, en supprimant le facteur commun p, se réduit à $TG''=\frac{M\times TB''+N\times TA''+P\times TC''}{M+N+P}$. Or, en menant les lignes BB', AA', CC' parallèles à TG'', & terminées à la verticale TC; imaginant de plus, que le point G pris sur la direction de la résultante, est le centre que nous cherchons, & menant GG' aussi parallèle à TG'', on a $TG''=G'G$, $TB''=BB'$, $TA''=AA'$, $TC''=CC'$; donc $GG'=\frac{M\times BB'+N\times AA'+P\times CC'}{M+N+P}$; c'est-à-dire, en restreignant le mot de *momens*, & n'entendant par ce mot, que le produit de la masse d'un corps par sa distance à une ligne droite.

La distance du centre commun de gravité de plusieurs corps, à une ligne droite, se trouve en divisant la somme des momens de ces corps, (pris par rapport à cette ligne) par la somme des masses.

Concevons maintenant que l'on renverse le systême des corps M, N, P, en sorte que la ligne TA'' qui étoit horizontale, devienne verticale, & au contraire pour la ligne TC'; alors on démontrera de même, que pour avoir la distance de la résultante, à la ligne TA'' qui est alors verticale, il faut prendre la somme des momens à l'égard de TA'', & diviser cette somme, par celle

des masses. On aura donc, de même ....
$GG''=\frac{M\times BB''+N\times AA''+P\times CC''}{M+N+P}$. Or ayant déterminé les distances de G aux deux lignes fixes & connues TA'' & TC', il est évident que la position de ce centre est connue, puisque les distances BB', BB'', AA', AA'', &c. sont connues, attendu qu'on est maître de prendre, par-tout où l'on voudra, le point T par où on mène TA' & TC'.

231. Si les distances AA'', BB'', &c. sont chacune zéro; c'est-à-dire, si tous les corps sont sur une même ligne droite TA''; alors la somme des momens, par rapport à cette droite, est zéro; donc la distance GG'' est aussi zéro. Donc *si plusieurs corps considérés comme des points, sont sur une même ligne droite, leur centre commun de gravité est aussi sur cette même ligne droite.*

232. Si l'on menoit les lignes TA'', & TC'', de manière que l'une ou l'autre, ou toutes deux, se trouvassent avoir des corps de part & d'autre; alors, au lieu de la somme des momens, il faudroit dire la somme des momens des corps qui se trouvent d'un côté, moins la somme des momens des corps qui se trouvent de l'autre. Quant au dénominateur de la fraction qui exprime la distance du centre de gravité, il sera toujours composé de

la somme des masses, parce que toutes les forces de ces masses, en vertu de la pesanteur, agissent toutes dans le même sens. Cela est général pour quelque nombre de corps que ce soit, qui étant considérés comme des points, sont tous dans un même plan. Et tout cela est une suite de ce qui a été dit (219).

Les lignes TA', TA'' s'appellent *Axes des Momens.*

233. Si l'on conçoit maintenant que le point T que nous avons pris d'abord arbitrairement, soit sur le point G; alors GG' & GG'' deviennent, chacune, zéro. Donc la somme des momens par rapport à TC', & la somme des momens par rapport à TA'', doivent alors être zéro, chacune.

234. Présentement, je dis que si la somme des momens de plusieurs corps, par rapport à la droite RS qui passe par le point G (*fig.* 54), est zéro; & s'il en est de même de la somme des momens, par rapport à la droite PQ perpendiculaire à RS, & qui passe par le même point G; la somme des momens par rapport à toute autre droite MN passant par le même point G, sera aussi zéro.

En effet, ayant mené les perpendiculaires AA', AA'', AA''' sur les lignes PQ, RS, MN: si l'on suppose que le point I est celui où AA' rencontre

MN; le triangle rectangle $GA'I$, donnera sin. GIA' ou cos. PGM : GA' ou AA'' :: sin. PGM : $A'I = \frac{AA'' \text{ sin. } PGM}{\text{cos. } PGM}$; donc $AI = AA' - A'I = AA' - \frac{AA'' \text{ sin. } PGM}{\text{cos. } PGM}$. Or dans le triangle rectangle IAA''', on aura (en supposant le rayon $= 1$) $1 : AI$ :: sin. AIA''' ou cos. PGM : AA'''; donc $AA''' = AI \times$ cos. PGM, c'est-à-dire, $AA''' = AA' \times$ cos. PGM, $- AA''$ sin. PGM; & par conséquent en multipliant par la masse A, on aura le moment $A \times AA''' = A \times AA' \times$ cos. $PGM - A \times AA''$ sin. PGM; c'est-à-dire que le moment du corps A, à l'égard de l'axe MN, est égal au cosinus de l'angle PGM multiplié par le moment à l'égard de l'axe PQ, moins le sinus du même angle PGM, multiplié par le moment à l'égard de l'axe RS.

Or il est facile de voir que la même chose aura lieu à l'égard de tout autre corps, à la différence des signes près, selon que les corps seront d'un même ou de différens côtés de MN. Donc si on fait une somme de tous les momens à l'égard de l'axe MN, on trouvera qu'elle est égale au cosinus de l'angle PGM, multiplié par la somme des momens à l'égard de PQ, moins le sinus de l'angle PGM, multiplié par la somme des momens à l'égard de RS. Or chacune de ces deux

dernières sommes est zéro, par la supposition; donc leurs produits par le cosinus & par le sinus de l'angle *PGM*, seront zéro; donc aussi *la somme des momens à l'égard de l'axe quelconque* M N *passant par le centre de gravité* G, *est zero.*

235. Concluons donc de-là que l'action résultante de toutes les actions particulières de la pesanteur sur chacune des parties d'un systême de corps, passe toujours par un même point de ce systême, quelque position que ce systême puisse avoir; car ce n'est que par rapport à la direction de la résultante que la somme des momens de plusieurs forces parallèles, peut être zéro.

Au reste, quoiqu'il n'ait été question jusqu'ici, que des corps dont les centres de gravité sont dans un même plan, cela ne s'étend pas moins au cas où les parties du systême sont dans différens plans: c'est ce qu'on va voir par ce qui suit.

236. Si les corps, toujours considérés comme des points, ne sont pas dans un même plan, on concevra un plan horisontal *XZ* (*fig.* 49); & de chacun des points pesans *P*, *Q*, *S*, on imaginera les verticales *PA*, *QB*, *SC*; & pour déterminer le point *E* par où passe la résultante *RE* dans la direction de laquelle doit être le centre de gravité, on prendra (223) les momens par rapport à deux

droites fixes TX, TZ prises dans le plan horisontal ZX, & perpendiculaires entr'elles; on prendra, dis-je, la somme des momens, comme si tous les corps étoient dans ce plan horisontal; & ayant divisé chacune de ces deux sommes de momens, par la somme des masses P, Q, S, on aura les deux distances $E'E$, $E''E$. Il ne sera donc plus question que de trouver à quelle distance EG au-dessous du plan horisontal XZ, se trouve ce centre. Or si l'on imagine la figure renversée, de manière que le plan XZ devienne vertical, & ZV soit alors le plan horizontal; on voit, par le même principe, que pour avoir la distance EG' correspondante & égale à la hauteur cherchée $E'G$, il faut prendre la somme des momens par rapport à ZT, comme si tous les corps étoient dans le plan ZV, & diviser cette somme des momens par la somme des masses; alors on a tout ce qu'il faut pour déterminer la position du centre de gravité.

237. Donc, pour récapituler; la recherche du centre de gravité se réduit.

1°. Lorsque tous les corps considérés, comme des points, sont situés sur une même ligne droite (*fig.* 55); à prendre la somme des momens par rapport à un point fixe F pris arbitrairement sur cette ligne, & diviser cette somme par la somme des

des masses; le quotient, est la distance du centre de gravité G, à ce même point F.

2°. Lorsque tout les corps considérés, comme des points, sont tous dans un même plan; on imaginera par un point T (*fig.* 53) pris arbitrairement dans ce plan, deux lignes TA'', TA' perpendiculaires l'une à l'autre; & ayant mené des perpendiculaires, de chaque point pesant, sur chacune de ces deux lignes, on imaginera que ces points pesans sont appliqués successivement sur la ligne TA'', & sur la ligne TA', chacun au point où aboutit sa perpendiculaire. Et l'on cherchera, comme dans le cas précédent, quel est alors le centre de gravité G'' sur TA''; & quel est le centre de gravité G' sur TA'; menant enfin par ces deux points, les lignes $G''G'$, $G'G$ parallèles à TA' & TA'', leur point de rencontre G sera le centre de gravité cherché.

3°. Enfin, lorsque les corps considérés, comme des points, seront dans différens plans, on imaginera trois plans; l'un horizontal (*fig.* 49) & les deux autres verticaux, & perpendiculaires entr'eux. De chaque point pesant, on abaissera une perpendiculaire sur chacun de ces plans; on prendra la somme des momens, par rapport à chaque plan, & divisant chaque somme, par la somme des masses, on aura les trois distances du centre de gravité, à chacun de ces plans.

Sur quoi, il faut toujours se souvenir que quand quelques-uns des corps se trouvent de différens côtés du point, ou de la ligne, ou du plan, par rapport auquel on considère les mouvemens, il faut prendre avec des signes contraires, les momens des corps qui se trouvent de différens côtés.

238. Plaçons ici une observation qui suit immédiatement de ce que nous venons de dire, & qui peut abréger, dans plusieurs occasions, la détermination du centre de gravité, & d'autres recherches.

Puisque la distance du centre de gravité est égale à la somme des momens, divisée par la somme des masses; si le point, la ligne, ou le plan par rapport auquel on considère les momens, passe par le centre de gravité; cette distance étant alors zéro, la somme des momens doit donc aussi être égale à zéro. Donc, en général, *la somme des momens par rapport à tel plan que ce soit, qui passe par le centre de gravité, est zéro.*

239. Jusqu'ici nous avons considéré les corps comme des points; & nous avons vu comment on détermine le centre commun de gravité de tous ces points, en quelque nombre qu'ils soient. Or un corps d'un volume & d'une figure quelconque, n'étant autre chose que l'assemblage d'une infinité

d'autres corps, ou parties matérielles, que l'on peut considérer comme des points, il s'ensuit donc que par la même méthode on peut déterminer le centre de gravité d'un corps de figure quelconque ; & nous allons en voir diverses applications dans un moment.

Et puisque le centte de gravité n'est autre chose que le point par où passe la résultante de tous les efforts particuliers que font les parties d'un corps pour obéir à leur pesanteur ; que d'ailleurs cette résultante est égale à la somme de tous ces efforts particuliers ; concluons-en qu'on peut toujours supposer tout le poids d'un corps réuni à son centre de gravité, & que ce poids y feroit le même effet qu'il est capable de faire sur ce point, dans sa distribution actuelle sur toutes les parties du corps.

240. Donc lorsqu'on aura à trouver le centre commun de gravité de plusieurs masses de figures quelconques, on commencera par chercher le centre de gravité de chacune de ces masses, ce qui est facile actuellement. Puis, considérant le poids de chacune de ces masses comme réuni à son centre de gravité, on cherchera le centre commun de gravité, comme si tous ces corps étoient des points placés à l'endroit où chacun a son centre de gravité particulier.

241. Donc tout ce que nous avons dit jusqu'ici, sur le centre commun de gravité de plusieurs corps, considérés comme des points, a également lieu pour les corps de figure quelconque, en prenant, dans l'évaluation des momens, pour distance de chaque corps, la distance de son centre de gravité particulier.

242. Donc *si plusieurs corps, de quelques figures qu'ils soient, ont leurs centres particuliers de gravité dans une même ligne droite, ou dans un même plan; leur centre commun de gravité sera aussi dans cette même ligne droite, ou dans ce même plan.* Cela se démontre comme on l'a fait (231).

243. Venons aux applications.

Soit AB (*fig.* 56) une ligne droite uniformément pesante; il est évident que son centre de gravité est dans son milieu. Mais si on veut savoir comment on le détermineroit d'après le principe des momens, voici comment on se conduira.

Il faut concevoir cette ligne partagée en une infinité de parties telles que Pp; multiplier chacune par sa distance à un point fixe; par exemple, par sa distance à l'extrémité A; prendre la somme de ces produits, & diviser le tout par la somme des parties Pp; c'est-à-dire, par la ligne AB. Nommons donc AB, a; AP, x; nous aurons $Pp = dx$; le moment de Pp sera $x\,dx$, qu'il faut intégrer pour avoir la somme des momens; cette somme sera donc $\frac{x^2}{2}$; & pour

l'avoir dans toute l'étendue de la ligne, il faut ſuppoſer $x = a$; on a donc $\frac{a^2}{2}$ pour la ſomme totale des momens; diviſant donc par la ſomme a des maſſes, on a $\frac{a}{2}$, pour la diſtance du centre de gravité au point A. Ainſi, le centre de gravité d'une ligne droite uniformément peſante, eſt dans ſon milieu; ce qui eſt d'ailleurs évident.

244. Donc 1°. *pour avoir le centre de gravité du contour d'un polygone quelconque (fig. 57)*, il faut du milieu de chaque côté, mener des perpendiculaires ſur deux lignes fixes AB, AC, tirées dans le plan de ce polygone; & conſidérant le poids de chaque côté, comme réuni au milieu de ce côté, chercher le centre commun de gravité de ces poids, comme il a été dit (230).

245. 2°. *Le centre de gravité de la ſurface d'un parallélogramme quelconque, eſt au milieu de la ligne qui joint les milieux de deux côtés oppoſés.* Car en concevant le parallélogramme compoſé de lignes matérielles parallèles à ces deux côtés, chacune aura ſon centre de gravité ſur la ligne qui paſſe par les milieux de ces deux mêmes côtés. Le centre commun de gravité de toutes ces lignes ſera donc ſur cette même ligne. Il ſera d'ailleurs au milieu, puiſque cette ligne conſidérée comme chargée de tous ces poids, eſt uniformément peſante.

246. 3°. *Pour avoir le centre de gravité de la ſurface d'un triangle* ABC, (*fig.* 58) il faut du ſommet A, mener au milieu D du côté oppoſé BC la droite AD; & prendre, à compter du point D, la partie $DG = \frac{1}{3} AD$.

En effet, la droite AD qui diviſe BC en deux parties égales au point D, diviſera auſſi en deux parties égales,

centre de gravité de la surface de tout solide terminé par des surfaces planes.

149. Au reste, il n'est pas toujours nécessaire d'avoir recours aux momens, pour trouver les centres de gravité. Par exemple, s'il s'agissoit de trouver le centre de gravité du contour du pentagone régulier *ABCDE* (*fig. 61*) je mènerois de l'un *A* des angles, une droite *AF* au milieu *F* du côté opposé *CD*. J'en mènerois pareillement une seconde, de l'angle *E*, au milieu du côté opposé *BC*; l'interſection G de ces deux lignes seroit le centre de gravité.

En effet, le centre commun de gravité des deux côtés *AB*, *AE*, est au milieu *c* de la ligne *ba* qui passe par leurs milieux; cela est évident. Le centre commun de gravité des deux côtés *BC*, *DE*, est par la même raison, au milieu *e* de la ligne *Id* qui passe par leurs milieux. Enfin le côté *CD*, a son centre de gravité en *F*. Or il est facile de voir que la ligne *AF* passe par les milieux *c*, *e*, & *F*; elle passe donc par le centre commun de gravité des cinq côtés; un raisonnement semblable, prouvera que *IE* passe aussi par ce centre; ce centre est donc à l'interſection *G*, de *AF* & de *IE*.

150. En raisonnant comme nous l'avons fait pour le triangle, on prouvera que le point *G* est aussi le centre de gravité de la surface du pentagone régulier.

Et en général, on prouvera de la même manière, que le centre de gravité du contour, ainsi que de la surface d'un polygone régulier d'un nombre de côtés impair, est au point d'interſection des deux droites dont chacune est menée de l'un des angles, au milieu du côté opposé. Et lorsque le nombre

des côtés est pair, ce centre est au point d'intersection de deux lignes menées par les milieux de deux côtés opposés; d'où l'on concluroit, s'il en étoit besoin, que le centre de gravité de la circonférence & de la surface d'un cercle, est au centre.

Quand le nombre des lignes, surfaces, corps, &c. dont on a à trouver le centre commun de gravité, n'est pas considérable, on peut faire usage de ce que nous avons dit (206 & 207). Par exemple, soient trois points *A*, *B*, *C* (*fig.* 62) qui soient les centres de gravité de trois lignes, ou trois surfaces, ou trois corps; dont les poids sont représentés par les masses *M*, *N*, *P*. Ayant joint deux de ces points *C* & *B*, par la ligne *BC*, on partagera *BC* en *D*, de manière que l'on ait $N : P :: CD : BD$, ou $N+P : N :: CB : CD$; le point *D* sera le centre commun de gravité des deux poids *P* & *N*. On mènera ensuite *DA*; & imaginant la totalité $N+P$ des deux masses *N* & *P* rassemblée en *D*, on partagera, de même, *DA*, en raison inverse des deux masses *M* & $N+P$; c'est-à-dire, de manière que $N+P : M :: AE : DE$, ou que $N+P+M : M :: AD : DE$; le point *E* sera le centre commun de gravité des trois poids *M*, *N*, *P*. On continueroit de même pour un plus grand nombre de corps.

251. Concluons, de ce qui précède, que l'on peut avoir facilement le centre de gravité de la surface & de la solidité de tout prisme & de tout cylindre.

En effet, il est évident que ce centre doit être au milieu de la ligne qui passe par les centres de gravité des deux bases opposées; puisque ces corps sont composés de tranches parfaitement égales & semblables à la base, que l'on peut considérer comme autant de poids égaux uniformément distribués sur cette ligne.

252. *Pour avoir le centre de gravité* G *d'une pyramide triangulaire* S A B C (*fig.* 63) il faut, du sommet, mener au centre de gravité *F* de la base, la droite *SF*, & prendre sur cette ligne, à compter du point *F*, la partie $FG = \frac{1}{4}\ SF$.

En voici la raison. Du milieu *D* du côté *AB*, menons *DC*, *DS*, & ayant pris $DF = \frac{1}{3}\ CD$, & $DE = \frac{1}{3}\ DS$, les points *F* & *E* seront les centres de gravité des deux triangles *ABC*, *ASB*.

Cela posé, si l'on conçoit la pyramide, composée de plans matériels parallèles à *ABC*, la ligne *SF* qui passe par le point *F* de la base, passera, dans chaque tranche, par un point qui sera placé de la même manière dans cette tranche. Ainsi, les centres de gravité particuliers de chaque tranche sont tous sur la ligne *SF*. Par la même raison, les centres de gravité particuliers des tranches parallèles à *ABS*, dont on peut imaginer que la pyramide est composée, sont tous sur *EC*. Donc le centre de gravité de la pyramide, est au point *G*, où les deux lignes *FS*, & *EC* se coupent. Or si l'on mène *FE*, elle sera parallèle à *CS*, puisque *DF* étant le tiers de *DC*, & *DE*, le tiers de *DS*, ces deux lignes *DC* & *DS* sont coupées proportionnellement. Les deux triangles *FEG*, *GCS* seront donc semblables entr'eux, & il en sera de même des deux triangles *DFE*, *DCS*; on aura donc $FG : GS :: FE : CS :: DF : DC :: 1 : 3$; donc *FG* est le tiers de *GS*, & par conséquent le quart de *FS*.

253. Comme on peut décomposer tout solide, en pyramides triangulaires; connoissant actuellement le centre de gravité d'une pyramide triangulaire, il est facile, à l'aide des momens, de trouver le centre de gravité d'un corps quelconque.

254. Telle eſt la manière générale de trouver les centres de gravité des figures, ou des corps, dont les parties ſont indépendantes les unes des autres, ou du moins, lorſqu'on n'a point l'expreſſion de la loi qui les lie les unes aux autres.

Mais lorſque les parties d'une figure ou d'un corps ont entr'elles une relation que l'on peut exprimer par une équation, on peut alors trouver le centre de gravité d'une manière beaucoup plus facile. En voici des exemples.

255. Qu'il s'agiſſe d'abord de trouver le centre de gravité G, d'un arc quelconque de courbe AM (*fig.* 64), on imaginera l'arc infiniment petit Mm; & l'on prendra pour axe des momens une ligne quelconque CN parallèle aux ordonnées que je ſuppoſe parallèles entr'elles. Je ſuppoſe de plus que la diſtance de C à l'origine A des abſciſſes ſoit $= b$. Pour avoir la diſtance Gg du centre de gravité à l'axe CN, il faut prendre la ſomme des momens des arcs Mm, par rapport à l'axe CN, & la diviſer par la ſomme des arcs Mm; c'eſt-à-dire, par l'arc AM. Or l'arc Mm étant infiniment petit, la diſtance de ſon milieu n, à la droite CN, doit être réputée égale à MN. On aura donc $Mm \times MN$ pour le moment de ce petit arc. Mais en nommant AP, x; PM, y; on a (73) $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ & $MN = CP = b - x$; donc $(b - x)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ eſt le moment du

petit arc *Mm*; & par conséquent $\int (b-x) \sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ou l'intégrale de $(b-x) \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ est la somme des momens de tous les arcs infiniment petits *Mm*, dont l'arc *AM* est composé. On a donc $Gg = \frac{\int (b-x)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{AM}$. Quant à l'arc *AM* qui divise, dans cette quantité; nous avons donné (73) la méthode pour le déterminer exactement, lorsque cela se peut; & (85) celle de le déterminer par approximation.

Par un raisonnement semblable, on trouvera que la distance Gg', du centre de gravité, à l'axe *AP*, est $\frac{\int y \sqrt{(dx^2+dy^2)}}{AM}$.

Ce sont-là les formules générales qui servent à déterminer le centre de gravité d'un arc quelconque de courbe.

256. Si l'arc dont on veut avoir le centre de gravité, est composé de deux parties égales & semblables *AM*, *AM'* (*fig. 65*) situées de part & d'autre de l'axe des abscisses; alors il est évident que le centre de gravité *G*, sera sur la droite *AP*; il ne sera donc question que de trouver sa distance au point *C*. Or il est clair que les momens des deux arcs *Mm*, *M'm'*, à l'égard de l'axe *NN'*

étant égaux, la distance CG sera alors égale à $\frac{2\int(b-x)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{MAM'}$.

Par exemple, que l'arc MAM' soit un arc de cercle; on aura $y = \sqrt{(ax - xx)}$, a étant le diamètre. On trouvera facilement, & nous l'avons déjà vu (57) que $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$. On aura donc

$$2\int(b-x)\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{2\int\frac{1}{2}a(b-x)dx}{\sqrt{(ax-xx)}} =$$

$a\int(b-x)\,dx\,(ax-xx)^{-\frac{1}{2}}$. Supposons, pour plus de simplicité, que le point C soit le centre, alors $AC = b = \frac{1}{2}a$: nous aurons donc $2\int(b-x)\sqrt{(dx^2+dy^2)} = a\int(\frac{1}{2}a - x)dx(ax-xx)^{-\frac{1}{2}} = a\sqrt{(ax - xx)}$ (66); intégrale à laquelle il n'y a point de constante à ajouter, parce que, lorsque $x = 0$, elle devient zéro, ainsi que cela doit être; puisqu'alors la somme des momens est évidemment nulle.

Nous avons donc enfin $2\int(b-x)dx\sqrt{(dx^2+dy^2)} = a\sqrt{(ax-xx)}$; & par conséquent........

$$CG = \frac{a\sqrt{(ax-xx)}}{MAM'} = \frac{\frac{1}{2}a \times 2\sqrt{(ax-xx)}}{MAM'} = \frac{CA \times MM'}{MAM'}$$

ce qui donne cette proportion, $MAM' : MM' :: CA : CG$, qui nous apprend que *la distance du centre d'un cercle, au centre de gravité de l'un quelconque de ses arcs, est quatrième proportionnelle à la longueur de l'arc, à sa corde, & au rayon.*

On peut appliquer ces formules à toute autre courbe; nous passons aux centres de gravité des surfaces planes terminées par des lignes courbes.

257. Si l'on demande le centre de gravité de la surface APM (*fig.* 66); nous supposerons que G représente ce centre. Il faudra, pour avoir la distance Gg, prendre la somme des momens des petits trapèzes $MPmp$, par rapport à CN, & la diviser par la somme de ces trapèzes; c'est-à-dire, par l'espace APM. Or le centre de gravité i de ce petit trapèze doit être au milieu de la droite nk également éloignée de MP & de mp; milieu que l'on peut supposer être celui de MP, à cause de la hauteur infiniment petite Pp; on aura donc la distance $il = CP$; ainsi le moment de $PpmM$, à l'égard de NC, sera $PpmM \times CP$; c'est-à-dire $(b-x)ydx$, en appelant toujours CA, b; & AP, x. Donc la somme des momens sera $\int(b-x)ydx$, & par conséquent la distance Gg sera $\frac{\int(b-x)ydx}{APM}$.

On trouvera de la même manière, que la distance $Gg' = \frac{\int \frac{1}{2}y^2 dx}{APM}$.

258. En général, on trouvera de la même manière, le centre de gravité de tout espace plan, en le décomposant en trapèzes infiniment petits.

Par exemple, s'il s'agit du triangle ANN' (*fig.* 67), on prendra la base NN' & la hauteur AC pour axes des momens; & nommant AP, x; MM', y; & AC, b; on aura $MM'm'm = ydx$: & le moment de ce trapèze à l'égard de NC, sera $(b-x)ydx$. En sorte

que la distance Gg du centre de gravité à la base, sera $\frac{\int (b-x)\,y\,dx}{AMM'}$. Or si l'on nomme c la base, on a $AC : AP :: NN' \; MM'$; c'est-à-dire, $b : x :: c : y = \frac{cx}{b}$; donc $\int (b-x)\,y\,dx$, devient $\int (b-x)\frac{cx\,dx}{b}$, ou $\int \frac{c}{b}\;(bx\,dx - x^2 dx)$, qui vaut $\frac{c}{b}\left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ ou $\frac{cx^2}{6b}(3b - 2x)$. Or la surface AMM' est $\frac{MM' \times AP}{2}$ ou $\frac{cx^2}{2b}$; donc la distance du centre de gravité, est $\frac{\frac{cx^2}{6b}(3b-2x)}{\frac{cx^2}{2b}}$ ou $\frac{1}{3}(3b - 2x)$, qui, lorsque $x = b$, devient $\frac{1}{3}b$. Donc $Gg = \frac{1}{3}b$. Or si l'on mène la ligne AGL, les triangles semblables ACL, GgL donnent $LG : LA :: Gg : AC :: \frac{1}{3}b : b :: 1 : 3$; donc $LG = \frac{1}{3}LA$, ce qui s'accorde avec ce que nous avons démontré (246).

259. Appliquons maintenant les formules aux lignes courbes.

Supposons que APM (*fig.* 68) est une portion de cercle dont le diamètre est a, & que le point C est le centre; ce qui donne $b = \frac{1}{2}a$. Nous aurons $y = \sqrt{(ax - xx)}$. La quantité $\int (b-x)\,y\,dx$, devient donc $\int (\frac{1}{2}a - x)\,dx \sqrt{(ax - xx)}$, ou $\int (\frac{1}{2}a - x)\,dx\,(ax - xx)^{\frac{1}{2}}$ qui (66) est intégrable, & a pour intégrale $\frac{1}{3}(ax - xx)^{\frac{3}{2}}$; quantité à laquelle il n'y a point de constante à ajouter, parce qu'elle est zéro quand $x = 0$, ainsi que

cela doit être. Nous avons donc $Gg = \frac{\frac{1}{3}(ax - xx)^{\frac{3}{2}}}{APM}$ $= \frac{\frac{1}{3}(PM)^3}{APM}$.

A l'égard de Gg'; puisqu'on a $y = \sqrt{(ax - xx)}$ sa valeur $\frac{\int \frac{1}{2} y^2 dx}{APM}$ (257), sera $Gg' = \frac{\int \frac{1}{2} \cdot (ax - xx) dx}{APM}$ or $\int \frac{1}{2} (ax - xx) dx$, ou $\int \frac{1}{2} \cdot (ax dx - x^2 dx)$, est $\frac{1}{2} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ ou $\frac{1}{12} x^2 (3a - 2x)$; on a donc $Cg' = \frac{\frac{1}{12} x^2 (3a - 2x)}{APM}$.

S'il s'agit du segment entier; comme il est évident que le centre de gravité G (*fig.* 65) est sur le rayon CA, qui divise l'arc en deux parties égales, & qu'il est à même distance de NN' que les deux centres de gravité particuliers des deux demi-segmens APM, APM', on a $CG = \frac{\frac{2}{3} PM^3}{APM} = \frac{\frac{1}{24} \cdot 8 \cdot (PM)^3}{APM} = \frac{\frac{1}{24} \cdot (MM')^3}{APM}$, $= \frac{\frac{1}{12}(MM')^3}{2APM} = \frac{\frac{1}{12}(MM')^3}{AMM'A}$; c'est-à-dire, que *la distance du centre d'un cercle, au centre de gravité de la surface de l'un quelconque de ses segmens, est égale au douzième du cube de la corde, divisé par la surface de ce segment.*

260. Quant au centre de gravité d'un secteur $CMAM'$ (*fig.* 69) on peut l'avoir, en observant que le centre de gravité G du segment MAM', celui G' du secteur, & celui G'' du triangle sont tous sur le rayon CA; que selon le principe des momens, le moment du secteur doit être égal au moment du segment, plus le moment du triangle. On a donc $CMAM' \times CG' = MAM' \times CG + CMM' \times CG''$. Or nous

venons

venons de trouver $CG = \frac{\frac{2}{3}(PM)^3}{APM}$ que l'on peut changer en $\frac{\frac{2}{3}(PM)^3}{2\,APM} = \frac{\frac{2}{3}(PM)^3}{MAM'}$; donc $CG \times MAM' = \frac{2}{3}(PM^3)$. D'ailleurs, nous savons que $CMM' = PM \times CP$, & (246) que $CG'' = \frac{2}{3}\,CP$, en sorte que $CMM' \times CG''$ se réduit à $\frac{2}{3}\,PM \times (CP)^2$. Substituant donc ces valeurs, on a $CMAM' \times CG' = \frac{2}{3}\,PM^3 + \frac{2}{3}\,PM \times CP^2 = \frac{2}{3}\,PM\,[(PM)^2 + (CP)^2] = \frac{2}{3}\,PM \times (CM)^2$, à cause du triangle rectangle CPM. Donc $CG' = \frac{\frac{2}{3}\,PM \times (CM)^2}{CMAM'}$. Mais la surface du secteur $CMAM'$, est égale à l'arc MAM' multiplié par $\frac{CM}{2}$; donc $CG' = \frac{\frac{2}{3}\,PM \times (CM)^2}{\frac{MAM' \times CM}{2}} = \frac{\frac{4}{3}\,PM \times CM}{MAM'} = \frac{\frac{2}{3}\,MM' \times CA}{MAM'}$. C'est-à-dire, *que la distance du centre d'un cercle, au centre de gravité de l'un quelconque de ses secteurs, est quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon, & aux deux tiers de la corde.*

On peut appliquer les formules à toute autre courbe, par exemple, à la parabole, &c.

261. Voyons maintenant les surfaces courbes; mais bornons-nous à celles des solides de révolution. Alors, en raisonnant comme dans les articles précédens, on verra que le centre de gravité de chaque zone élémentaire, est dans l'axe de révolution CA (*fig.* 70), & doit être réputé au centre P de l'une des bases de cette zone, considérée comme ayant une épaisseur infiniment petite. Or,

$CA - \frac{1}{2} AP$; c'eſt-à-dire, que ce centre C, eſt au milieu C de la hauteur AP de ce ſegment. D'où l'on peut conclure en général, que le centre de gravité de la ſurface d'une zone ſphérique, compriſe entre deux plans parallèles, eſt au milieu de la hauteur de cette zone.

264. Terminons par la recherche des centres de gravité des ſolides.

Si l'on conſidère un ſolide (*fig.* 70) comme compoſé de tranches infiniment minces, parallèles entr'elles, & qu'on repréſente, en général, par ss, la ſurface de chaque tranche, & par dx ſon épaiſſeur, on aura $ssdx$ pour cette tranche ; & par conſéquent $ss(b - x)\,dx$ pour ſon moment à l'égard d'un plan parallèle à ces tranches, & paſſant à une diſtance AC du ſommet $A = b$. Donc en nommant S la ſolidité $ALMM'A$, on aura pour la diſtance du centre de gravité, la quantité $\frac{\int ss\,(b - x)\,dx}{S}$. Or la valeur de S ſe détermine par les méthodes que nous avons données dans le calcul intégral ; & celle de $\int ss\,(b - x)\,dx$, ſe déterminera, auſſi, par ces mêmes méthodes, lorſqu'on aura la valeur de ss en x. On aura donc la diſtance du centre de gravité par rapport à un plan connu. On cherchera de la même manière la diſtance de ce centre à chacun de deux autres plans perpendiculaires entre eux & au premier. Mais

nous nous bornerons ici aux solides dont les tranches parallèles, ont chacune leur centre de gravité particulier sur une même ligne droite, tels que sont les pyramides, & les solides de révolution.

265. Prenons d'abord les pyramides. Soit donc b, la hauteur AC d'une pyramide quelconque (*fig.* 73); x la distance perpendiculaire AP d'une tranche quelconque, ee la surface de la base; on aura (*Géom.* 202) celle de la tranche placée à la distance x du sommet par cette proportion, $bb : xx :: ee : \frac{eexx}{bb}$; nous avons donc $ss = \frac{eexx}{bb}$; donc $\int ss\,(b - x)\,dx$, devient $\int \frac{ee}{bb}(bxxdx - x^3 dx)$, qui revient à $\frac{ee}{bb}$ $\left(\frac{bx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$ ou $\frac{eex^3}{12\,bb}(4b - 3x)$. Or la solidité de la pyramide qui a x pour hauteur, & ss ou $\frac{eexx}{bb}$ pour base, est $\frac{eex^3}{3\,bb}$; donc la distance du centre de

gravité, est $$\frac{\frac{eex^3}{12\,bb}(4b - 3x)}{\frac{eex^3}{3\,bb}},$$ ou $\frac{1}{4}(4b - 3x)$ ou $b - \frac{3}{4}x$; or lorsque $x = b = AC$; cette quantité se réduit à $\frac{1}{4}b$; donc la hauteur Cg' du centre de gravité G, au-dessus de la base est, $\frac{1}{4}b$.

Soit maintenant g, le centre de gravité de la base, la ligne Ag passera par le centre de gravité G de la pyramide; & les parallèles Gg' & gC donneront Cg' ou $\frac{1}{4}b : AC$ ou $b :: Cg : Ag$; donc $Gg = \frac{1}{4}Ag$ à

ce qui confirme ce que nous avons dit (252) & fait voir que pour toute pyramide, le centre de gravité de la solidité, est au quart de la distance du centre de gravité de la base, au sommet.

266. Quant aux solides de révolution, la valeur de ss (78) est généralement $\frac{cy^2}{2r}$; ainsi l'expression de la distance du centre de gravité, pour ces solides, est généralement $\frac{\int \frac{cy^2 (b-x)\, dx}{2r}}{S}$.

267. Appliquons d'abord cette formule, au cône tronqué faisant partie d'un cône droit (*fig.* 74).

Soit m le rayon BD de la plus grande base, & n le rayon AC de la plus petite. Si on conçoit AQ parallèle à la hauteur CD, & qui rencontre en O celui des rayons PM de la tranche MLM', qui est dans le plan du trapèze $ACDB$, on aura AQ ou $CD : BQ :: AO$ ou $CP : MO$; c'est-à-dire, en nommant CD, h; CP, x; PM, y; $h : m-n :: x : y-n$; donc $x = \frac{h}{m-n} \cdot (y-n)$; & $dx = \frac{h\,dy}{m-n}$. Or, ici, on a $b = h$; donc $b - x = h - \frac{h}{m-n}(y-n) = \frac{h}{m-n}(m-y)$; donc $\int \frac{cy^2 (b-x)\, dx}{2r} = \frac{ch^2}{2r(m-n)^2} \int y^2 (m-y)\, dy = \frac{ch^2}{2r(m-n)^2} \left(\frac{my^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right) + C = \frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(4my^3 - 3y^4) + C$.

Pour déterminer la constante C, j'observe que l'intégrale ou la somme des momens doit être zéro au

point C, c'est-à-dire lorsque $y = n$. On a donc $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(4mn^3 - 3n^4) + C = 0$, ou $C = \frac{-ch^2}{24r(m-n)^2}(4mn^3 - 3n^4)$; donc la somme des momens depuis C jusqu'au point quelconque P, est $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2} \cdot (4my^3 - 3y^4 - 4mn^3 + 3n^4)$; & par conséquent depuis C jusqu'en D, elle est $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(4m^4 - 3m^4 - 4mn^3 + 3n^4)$, ou $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(m^4 - 4mn^3 + 3n^4)$, ou $\frac{ch^2}{24r}(m^2 + 2mn + 3n^2)$; il ne s'agit donc plus que de diviser cette quantité par la solidité du cône tronqué, qui est facile à avoir, & dont nous avons d'ailleurs donné l'expression (*Alg.* 215).

Si l'on vouloit avoir la distance CG du centre de gravité du tronc de cône $ANN'B$ (*fig.* 75) creusé cylindriquement, & concentriquement à son axe; de l'expression qu'on vient de trouver pour le moment du cône tronqué, on retrancheroit le moment du cylindre intérieur considéré comme de même matière que le tronc; c'est-à-dire qu'on retrancheroit le produit de ce cylindre par la moitié de sa hauteur, & on diviseroit le reste par la solidité du tronc évidé; solidité que nous avons enseigné à déterminer (*Alg.* 215).

D'après ces principes, il est facile de déterminer le centre de gravité d'une pièce de canon KL (*fig.* 76), dont les trois parties principales comprises entre AB, BC, CD, sont trois troncs de cônes évidés de l'espèce de la *figure* 75. Comme on a, par ce qui précède,

l'expression du moment de chacun de ces troncs à l'égard de sa base, on l'aura facilement à l'égard de l'extrémité K du bouton de la culasse, en ajoutant, pour chacun, le produit de ce tronc par la distance de sa plus grande base, au point K. A cette somme de momens on ajoutera celui de la culasse & du bouton, & ceux des ornemens, moulures & tourillons, estimés grossièrement; & divisant le tout par la masse totale de la pièce, on aura la distance du centre de gravité de la pièce, à l'extrémité K de son bouton.

On pourroit même, à la rigueur, déterminer par les principes donnés jusqu'ici, les momens des moulures; mais il sera suffisant, dans la pratique, de prendre pour moment de chacune, le produit de sa solidité par la distance du point K, au point de l'axe où répond le milieu de cette moulure.

268. Prenons, pour second exemple, les segmens de la sphère. Le diamètre étant a; l'abscisse AP, x (*fig.* 77); l'ordonnée PM, y; on a $yy = ax - xx$; ainsi la somme des momens des tranches élémentaires du segment $AMLM'A$ pris par rapport à un axe quelconque NN', sera $\int \frac{c}{2r} (b - x)(ax - xx)\,dx$. Donc par rapport au centre C, où $b = \frac{1}{2}a$, elle sera

$$\frac{c}{2r}\int (\tfrac{1}{2}a - x)(ax - xx)\,dx,$$

$$\text{ou } \frac{c}{2r}\int (\tfrac{1}{2}aax - \tfrac{3}{2}axx + x^3)\,dx,$$

$$\text{ou } \frac{c}{2r}(\tfrac{1}{4}aax^2 - \tfrac{1}{2}ax^3 + \tfrac{1}{4}x^4),$$

que l'on peut réduire à $\frac{c}{8r}x^2(a - x)^2$. Mais $\frac{c}{8r}x^2$ exprime la surface du cercle qui auroit pour diamètre la

hauteur AP du ſegment; on a donc $CP^2 \times$ cer. AP pour le moment de ce ſegment par rapport au centre C. Ainſi diviſant par la ſolidité du ſegment qui eſt facile à avoir (*Géom.* 248), on aura la diſtance du centre de gravité de ce ſegment, au centre C de la ſphère.

D'après cela, il eſt facile d'avoir le centre de gravité G d'une bombe (*fig.* 78). Il faut du moment de la ſphère entière pris par rapport à un point quelconque, retrancher le moment de la ſphère intérieure, & ajouter le moment du culot, pris par rapport au même point, & diviſer le tout par la maſſe de la bombe. Or ſi on prend le centre C pour le point à l'égard duquel on conſidère les momens, le moment de la ſphère entière & le moment de la ſphère intérieure, ſont chacun zéro; donc il faut ſeulement diviſer le moment du culot pris par rapport au centre de la bombe; par la maſſe de la bombe; le quotient ſera la diſtance CG du centre de la bombe, à ſon centre de gravité, abſtraction faite des anſes, &c.

Si on veut avoir le centre de gravité de la bombe lorſqu'elle eſt chargée, alors il faudra prendre la différence du moment du ſegment qu'occupe la poudre à celui du ſegment qui forme le culot, & qui ſe déterminent chacun comme il a été dit ci-deſſus; mais en obſervant de multiplier chacun par ſa peſanteur ſpécifique, c'eſt-à-dire le premier par le poids d'un pied cube de poudre, & le ſecond par le poids d'un pied cube de fer, ſi on a évalué la ſolidité en pieds cubes; après quoi on diviſera cette différence, par le poids total de la bombe & de la poudre.

Propriétés des Centres de gravité.

269. Il eſt clair, par ce que nous venons de dire ſur les centres de gravité, & par ce que nous avons dit ſur la rèſultante de pluſieurs forces parallèles, que ſi toutes les parties d'un corps ou d'un ſyſtème qulconque de corps, ont chacune la même vîteſſe, ou tendent à ſe mouvoir avec la même vîteſſe; il eſt clair, dis-je, que la réſultante de tous ces mouvemens paſſe par le centre de gravité de ce corps, ou de ce ſyſtème de corps, & que par conſéquent le ſyſtème ſe meut ou tend à ſe mouvoir, comme ſi la totalité des maſſes étoit concentrée au centre de gravité, & étoit animée d'une vîteſſe égale à celle qui anime chacune des parties.

270. D'où l'on doit conclure réciproquement, que ſi l'on applique au centre de gravité d'un corps ou d'un ſyſtème de corps une force quelconque; toutes les parties égales du ſyſtème partageront également ce mouvement, s'avanceront toutes avec une égale vîteſſe, que l'on aura (158) en diviſant la quantité de mouvement appliquée à ce centre, par la maſſe totale du corps ou du ſyſtème de corps.

En effet, la réſultante de tous les mouvemens que les parties du ſyſtème prendront, doit être la même pour

sa quantité & pour sa direction, que la force imprimée. Or si quelques-unes des parties prenoient plus de vîtesse que d'autres, on trouveroit facilement que la résultante de ces mouvemens ne passeroit pas par le centre de gravité, & on le verra encore plus clairement par la suite.

271. Et puisque plusieurs forces appliquées à un même point, se réduisent (en vertu des principes précédens) à une seule; il faut en conclure généralement, que *quelques forces que l'on applique au centre de gravité d'un corps ou d'un systême de corps, en quelque nombre qu'elles soient, & quelque direction qu'elles aient; toutes les parties de ce corps, ou de ce systême de corps, prendront une vîtesse égale, laquelle aura la même direction que la résultante de toutes ces forces, & sera égale à la quantité de mouvement qui représente cette force résultante, divisée par la masse totale du corps ou du systême de corps.*

272. D'où l'on doit conclure que *tant que les forces qui agissent sur un corps se réduiront ou pourront être réduites à une seule dont la direction passera par le centre de gravité, ce corps ne tournera point autour de son centre de gravité.*

273. Mais si les forces qui agissent sur un corps ne peuvent être réduites à une seule; ou si pouvant être réduites à une seule, la direction de celle-ci

ne passe point par le centre de gravité, alors toutes les parties du système ne seront pas mues d'un mouvement commun. Néanmoins le centre de gravité sera mu de la même manière que si toutes ces forces y étoient immédiatement appliquées. C'est ce qu'il s'agit de faire voir actuellement.

274. Supposons d'abord trois corps M, N, P, (*fig.* 79) mus suivant des lignes parallèles AD, BE, CF situées ou non situées dans un même plan, & mus avec des vîtesses représentées par les lignes AD, BE, CF. Supposons que G soit le centre de gravité de ces corps lorsqu'ils sont en A, B, C; & G' leur centre de gravité lorsqu'ils sont arrivés en D, E, F où ils arrivent en même temps, puisque leurs vîtesses sont représentées par AD, BE, CF, Si l'on mène la ligne GG', je dis qu'elle sera parallèle à ces lignes; qu'elle sera la route que le centre de gravité G suivra pendant le mouvement des corps; & que ce centre de gravité G la décrira uniformément.

1°. Il est facile de voir que la route du centre de gravité sera parallèle aux lignes AD, BE, &c. car à quelqu'endroit qu'on suppose ce centre dans un instant quelconque, si on imagine un plan qui passe par ce centre, la somme des momens, par rapport à ce plan, doit être zéro (238). Or si l'on conçoit

un plan parallèle aux directions des corps, & passant par le point G, les momens, par rapport à ce plan, ne peuvent manquer d'être zéro pendant tout le mouvement; car les corps, dans leur mouvement, sont supposés ne pas s'écarter de ce plan; leurs distances à ce plan sont donc toujours les mêmes; donc les momens sont aussi toujours les mêmes; mais au commencement, du mouvement, c'est-à-dire, lorsque le centre de gravité étoit en G, leur somme étoit zéro; donc elle est encore zéro, en quelqu'endroit de leurs directions que les corps se trouvent; donc le centre de gravité est toujours dans un plan parallèle aux directions des corps, & qui passe par la première position G de ce centre. Et comme, dans ce raisonnement, rien ne détermine la position de ce plan, sinon qu'il doit être paralléle aux directions des corps M, N, P, & passer par le point G; on prouvera de même, que ce centre est dans tout autre plan parallèle aux directions des corps, & passant par le point G; il est donc dans l'intersection commune de ces plans; donc le centre de gravité se meut suivant GG' parallèle aux directions de ces corps.

2°. Je dis qu'il se meut uniformément; c'est-à-dire, que si lorsque les corps M, N, P, &c. sont arrivés en a, b, c, &c. on suppose que le centre de gravité est en g, on aura $GG' : Gg :: AD$

: Aa : : BE : Bb : : &c. c'eſt-à-dire, que les eſpaces décrits en même temps, par le centre de gravité, & par chacun des corps, ſeront comme leurs vîteſſes.

En effet, ſi on conçoit un plan repréſenté par RS, auquel les directions des mouvemens ſoient perpendiculaires; on aura, par la nature du centre de gravité (236), $M \times AH + N \times BI + P \times CL = (M + N + P) \times GK$. Et par la même raiſon, lorſqu'ils ſont en D, E, F, on a $M \times DH + N \times EI + P \times FL = (M + N + P) \times G'K$. Si de cette équation on retranche la première, on aura (en faiſant attention que $DH - AH = AD$, $EI - BI = BE$, &c.) $M \times AD + N \times BE - P \times CF = (M + N + P) \times GG'$. Donc pat la même raiſon, lorſqu'ils ſeront en a, b, c, on aura $M \times Aa + N \times Bb - P \times Cc = (M + N + P) \times Gg$.

Or puiſque Aa, Bb, Cc ſont décrits uniformement, dans un même temps, ces eſpaces (156) doivent être entr'eux comme les vîteſſes AD, BE, CF; on a donc $AD : BE :: Aa : Bb$, $AD : CF :: Aa\ Cc$; donc $Bb = \frac{Aa \times BE}{AD}$, $Cc = \frac{Aa \times CF}{AD}$. Subſtituant ces valeurs dans notre dernière équation, & chaſſant le dénominateur AD,

elle se change en $(M \times AD + N \times BE - P \times CF) \times Aa = (M + N + P) \times Gg \times AD$. Enfin divisant cette équation, par celle ou entre GG', on a $Aa = \frac{Gg \times AD}{GG'}$, d'où l'on tire $GG' : Gg :: AD : Aa$; ce qu'il s'agissoit de démontrer.

Observons maintenant que l'équation où entre GG', donne $GG' = \frac{M \times AD + N \times BE - P \times CF}{M + N + P}$. Or les lignes AD, BE, CF, GG', sont les vîtesses des corps M, N, P, & du centre de gravité G; par conséquent $M \times AD$, $N \times BE$, &c. sont leurs quantités de mouvement. Donc puisque le raisonnement que nous avons fait jusqu'ici, ne dépend point du tout du nombre des corps, on peut conclure généralement; 1°. *que si tant de corps que l'on voudra, décrivent uniformément des lignes parallèles, le centre de gravité décrit aussi uniformément une ligne parallèle à celles-là.* 2°. *Que sa vîtesse est égale à la somme des quantités de mouvement des corps qui vont dans un sens, moins la somme des quantités de mouvement de ceux qui vont en sens contraire, le tout divisé par la somme des masses.*

275. Si quelques-uns des corps étoient en repos; la vîtesse de ces corps étant alors zéro, la quantité

de mouvement feroit auffi zéro ; ainfi elle difparoîtroit dans le numérateur de la fraction qui exprime la vîteffe du centre de gravité. Mais cela ne changeroit rien au dénominateur qui fera toujours la fomme de toutes les maffes.

276. Si la fomme des quantités de mouvement des corps qui vont dans un fens étoit égale à la fomme des quantités de mouvement de ceux qui vont en fens contraire, le numérateur de la fraction qui exprime la vîteffe du centre de gravité, feroit zéro. Ce centre de gravité feroit donc en repos. Donc quels que foient les mouvemens parallèles de plufieurs corps, leur centre commun de gravité refte en repos, quand la fomme des quantités de mouvement de ceux qui vont dans un fens, eft égale à la fomme des quantités de mouvement de ceux qui vont en fens contraire.

277. Puifque les quantités de mouvement repréfentent les forces (158) ; & que la réfultante de plufieurs forces parallèles (219) eft égale à la fomme de celles qui agiffent ou tendent à agir dans un fens, moins la fomme de celles qui agiffent, ou tendent à agir dans un fens contraire ; concluons donc que *fi plufieurs forces parallèles font appliquées aux différentes parties d'un fyftème quelconque de corps, le centre de gravité de ce fyftème fe meut*

comme

comme si ces forces lui étoient immédiatement appliquées.

278. Que les corps, en quelque nombre qu'ils soient, se meuvent maintenant suivant des lignes droites quelconques. Si on imagine deux lignes droites quelconques perpendiculaires entr'elles; & à leur point de rencontre, une troisième qui soit perpendiculaire à leur plan; on peut toujours décomposer la vîtesse de chaque corps, en trois autres parallèles à ces trois lignes. Or il suit de ce que nous venons de dire, que le mouvement du centre de gravité en vertu des mouvemens parallèles à l'une de ces lignes, sera parallèle à cette même ligne, sera uniforme, & que sa vîtesse sera égale à la somme des quantités de mouvement * estimées parallèlement à cette ligne, divisée par la somme des masses. Donc si l'on conçoit que l'on ait déterminé, par ce principe, le mouvement du centre de gravité parellèlement à chacune de ces trois lignes, & qu'ensuite on compose ces trois mouvemens pour les réduire à un seul, (ce qui est possible, puisqu'ils sont appliqués à un même point) on aura la route unique du centre de gravité.

* C'est par abréviation que nous disons seulement, la somme des quantités du mouvement : on doit toujours entendre la somme des quantités de mouvement des corps qui vont dans un sens, moins la somme des quantités de mouvement de ceux qui vont en sens contraire.

Or comme les élémens qu'on emploie ici, ne sont autre chose que les forces mêmes qu'ont les corps, parallèlement à ces trois lignes, & que la force unique du centre de gravité se trouve par-là composée des forces résultantes parallèlement à chacune de ces lignes, elle ne peut donc manquer d'être égale & parallèle à la résultante de toutes les forces appliquées à tous ces corps; donc en général *quelles que soient les directions & les valeurs des forces appliquées à différentes parties d'un système de corps, le centre de gravité se meut toujours, ou tend à se mouvoir, de la même manière que si toutes ces forces lui étoient immédiatement appliquées.*

279. Dans le raisonnement précédent, nous avons dit qu'on pouvoit toujours décomposer la vîtesse de chaque corps, en trois autres, parallèles à trois lignes données de position. Cependant si la direction de l'un des corps étoit parallèle au plan de deux de ces trois lignes, ou si elle étoit parallèle à l'une de ces trois lignes, il paroît qu'on ne peut, dans le premier cas, décomposer qu'en deux forces parallèles à deux de ces trois lignes; & que dans le second on ne peut faire aucune décomposition, en forces qui soient parallèles aux deux autres lignes. Nonobstant cette difficulté apparente, la proposition n'est pas moins générale; car on

voit, par exemple, que tant que la ligne *AB* (*fig.* 80) n'est pas parallèle à l'une des deux lignes *PR*, *PQ*, on peut toujours décompofer la force repréfentée par *AB*, en deux autres *AC*, *AD* parallèles à ces deux lignes; mais on voit, en même-temps, que plus *AB* approchera d'être parallèle à *PQ*, & plus la force *AD* diminuera; enforte qu'elle deviendra zéro, quand *AB* fera parallèle à *PQ*. Donc, dans ce cas on n'eft pas moins en droit de fuppofer une décompofition en deux forces, mais dont l'une foit zéro. Par la même raifon, on peut, dans ce même cas, fuppofer une décompofition en trois forces parallèles aux trois lignes *PQ*, *PR*, *PS*; mais deux de ces trois forces feront zéro.

280. De ce que nous venons de dire, & de ce qui a été dit (275), on doit conclure que *le centre de gravité d'un fyftème de corps, reftera en repos, fi ayant décompofé les forces appliquées à chaque partie du fyftème, en trois autres forces parallèles à trois lignes perpendiculaires entr'elles, la fomme des forces ou des quantités de mouvement parallèlement à chacune des trois lignes, eft zéro;* en prenant avec des fignes contraires les forces qui agiffent dans des fens oppofés.

281. Quand toutes les forces font dans un

même plan, il eſt évident qu'il ſuffit de décompoſer chaque force en deux autres, parallèles à deux lignes perpendiculaires entr'elles, & menées dans ce même plan; car les forces perpendiculaires au plan étant alors nulles, le mouvement du centre de gravité en vertu de ces forces eſt nul auſſi.

282. Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons ſuppoſé que chacun des corps qui compoſe le ſyſtème, obéiſſoit pleinement & librement à la force qui le ſollicite. Mais les mêmes choſes n'ont pas moins lieu, quand ils ſont contraints dans leurs mouvemens, pourvu que ces obſtacles ne viennent point d'une force étrangère au ſyſtême, c'eſt-à-dire, pourvu qu'ils ne ſoient autres que ceux qui réſultent de la difficulté que peuvent avoir ces corps à ſe prêter à ces mouvemens, par la manière dont ils ſont diſpoſés entr'eux, ou liés les uns aux autres; c'eſt ce que nous démontrerons, après avoir expoſé la loi générale de l'équilibre des corps, & la loi générale de leurs mouvemens.

Principe général de l'équilibre des Corps.

283. *Quelles que ſoient les forces (agiſſantes ou réſiſtantes) appliquées à un corps, à un ſyſtème de corps, à une machine, &c. & quelles que ſoient les directions de ces forces; ſi l'on conçoit que chacune*

*ſoit décompoſée en trois autres, parallèles à trois lignes tirées par tel point qu'on voudra & perpendiculaires entr'elles; il faut, pour que toutes ces forces puiſſent ſe faire équilibre, que la ſomme * des forces qui agiſſent parallèlement à chacune de ces trois lignes, ſoit zéro.*

En effet, nous avons vu (227) que quels que fuſſent le nombre & la nature des forces, on pouvoit toujours réduire toutes ces forces, à trois, dont les directions fuſſent parallèles à trois lignes perpendiculaires entr'elles. Donc ſi l'on ſuppoſe qu'il y a équilibre entre toutes les forces du ſyſtème, il faut qu'il y ait équilibre entre ces trois réſultantes, ou que chacune ſoit zéro. Mais ces trois réſultantes étant perpendiculaires entr'elles, ne peuvent ni ſe nuire, ni ſe favoriſer; donc chacune d'elle doit être zéro. Or chacune d'elles (223) eſt égale à la ſomme des forces parallèles qui lui ſeroient parallèles; donc en effet les ſommes des forces qui (par la décompoſition) agiſſent parallèlement à chacune des trois lignes perpendiculaires entr'elles, doivent être zéro chacune.

284. Si toutes les forces étoient dirigées dans

* Nous entendons toujours ici & dans la ſuite, par la *ſomme des forces*, la ſomme de celles qui agiſſent ou tendent à agir dans un ſens, moins la ſomme de celles qui agiſſent ou tendent à agir dans un ſens oppoſé.

un même plan, la somme des forces parallèles à chacune de deux lignes tirées dans ce plan, perpendiculairement l'une à l'autre, seroit zéro. Et si toutes les forces étoient parallèles entr'elles, il faudroit que la somme de toutes ces forces fût zéro. Ces deux cas sont évidemment compris dans la proposition générale.

285. Remarquons bien que cette proposition aura toujours lieu, dans quelque cas d'équilibre que ce soit; mais on auroit tort de penser qu'elle suffit pour qu'il y ait équilibre. Les autres conditions nécessaires pour l'équilibre, varient suivant les qualités ou les dispositions particulières des parties du systême ou de la machine que l'on considère, nous nous en occuperons dans le volume suivant : il ne s'agit ici que des principes généraux.

286. Ce principe est général, soit que les forces qui sont appliquées aux différentes parties du systême, soient toutes agissantes, soit que quelques-unes seulement soient agissantes, & les autres capables seulement de résister; tels seroient des appuis, des points fixes, des surfaces, &c. qui s'opposeroient à l'action des autres forces. Car les résistances de ces obstacles équivalent à des forces agissantes.

Principe général du Mouvement.

287. *De quelque manière que plusieurs corps viennent à changer leurs mouvemens actuels, si l'on conçoit que le mouvement que chaque corps auroit dans l'instant suivant, s'il devenoit libre, soit décomposé en deux autres dont l'un soit celui qu'il aura réellement après le changement ; le second doit être tel que si chacun des corps n'eût eu d'autre mouvement que ce second, tous les corps fussent demeurés en équilibre.*

Cela est évident, puisque si ces seconds mouvemens n'étoient pas tels qu'il en résultât l'équilibre dans le système, les premiers mouvemens composans ne seroient pas ceux que les corps auroient après le changement, car ils seroient nécessairement altérés par ceux-là.

Ce principe est dû à M. d'*Alembert*. Voyez sa *Dynamique*.

Conséquences qui résultent des deux principes précédens, par rapport au mouvement du centre de gravité des Corps.

288. Concevons maintenant que plusieurs corps, soit libres, soit liés entr'eux de quelque manière que ce soit, (de manière cependant que rien

n'assujettisse le systême de tous ces corps) viennent à recevoir des impulsions quelconques auxquelles ils ne puissent obéir pleinement, parce qu'ils se gênent réciproquement ; je dis que le centre de gravité sera mu, comme si tous ces corps eussent été libres.

En effet, quel que soit le mouvement que chaque partie du systême prendra, on peut toujours concevoir celui qui lui est imprimé, comme composé de celui qu'il prendra, & d'un autre. Or (286) en vertu de ces seconds mouvemens, il doit y avoir équilibre ; donc si l'on conçoit ces seconds mouvemens, décomposés chacun en trois autres, parallèles à trois lignes perpendiculaires entr'elles, la somme des forces qui en résulteront parallèlement à chacune des ces lignes, doit être zéro (282). Or le chemin que le centre de gravité tend à décrire en vertu de chacune de ces forces, est (273) égal à la somme des forces parallèles à chacune de ces lignes, divisée par la somme des corps ; donc le chemin qu'il tend à décrire en vertu des changemens survenus dans le systême, par l'action réciproque des parties de ce systême, est zéro ; donc le centre de gravité ne participe point à ces changemens. Donc il est mu comme si toutes les parties du systême obéissoient librement & sans aucune perte, chacune à la force qui la sollicite.

Donc en général, *l'état du centre de gravité d'un corps ou d'un ſyſtème de corps, ne change point par l'action mutuelle des parties de ce corps ou de ce ſyſtème.*

289. Concluons de là 1° que *ſi un corps ou un ſyſtème de corps tourne autour de ſon centre de gravité, de quelque manière que ce ſoit; ce centre reſtera continuellement dans le même état que ſi le corps ne tournoit pas.*

2°. De ce même principe, & de ce qui a été dit plus haut ſur le mouvement du centre de gravité des corps libres, il ſuit que ſi un corps de figure quelconque, ou un aſſemblage quelconque de corps, reçoit une impulſion ſuivant une direction quelconque *AB* (*fig.* 81), laquelle ſe tranſmette toute entière à ce corps; le centre de gravité *G* ſera mu ſuivant une ligne *GS* parallèle à *AB*, de la même manière que ſi cette impulſion lui eût été tranſmiſe immédiatement, ſuivant cette même direction *GS*. Et ſi plúſieurs forces agiſſent à la fois ſur différens points de ce corps, ce centre de gravité ſera mu, comme ſi toutes ces forces lui étoient immédiatement appliquées.

290. Donc ſi au moment où le corps eſt frappé ſuivant la direction *AB*, on appliquoit au

centre de gravité G une force dirigée en sens contraire suivant SG, & égale à la force qui agit suivant AB, le centre de gravité resteroit en repos. Néanmoins il est évident que les autres parties de ce corps ne demeureroient point en repos, puisque ces deux forces, quoiqu'égales, ne sont pas directement opposées. Or le seul mouvement que le corps puisse avoir, son centre de gravité restant en repos, est évidemment un mouvement de rotation autour de ce centre de gravité.

Donc *si un corps reçoit une ou plusieurs impulsions suivant des directions qui ne passent point par son centre de gravité*; 1° *ce centre de gravité sera mu, comme si toutes les forces lui étoint immédiatement appliquées, chacune suivant une direction parallèle à celle qu'elle a.* 2°. *Les parties de ce corps tourneront autour du centre de gravité, comme elles le feroient en vertu des forces qui sont actuellement appliquées au corps, si ce centre de gravité étoit fixement attaché.*

Nous déterminerons ces mouvemens de rotation dans le volume suivant.

On voit par-là, pour le dire en passant, que si la direction de l'effort de la poudre sur la bombe (*fig.* 78) ne passe pas exactement par le centre de gravité G de la bombe, celle-ci tournera autour de G. Elle peut tourner encore par d'autres causes que nous examinerons ailleurs.

291. Concluons encore que ſi l'état du centre de gravité d'un corps, vient à changer, ce ne peut être que par l'action ou par la réſiſtance de nouvelles forces étrangères à ce corps; & que par conſéquent ce changement ſe déterminera toujours en cherchant la réſultante qu'auroient toutes ces forces, ſi elles étoient appliquées au centre de gravité, chacune ſuivant une direction parallèle à celle qu'elle a actuellement.

Tels ſont les principes généraux du mouvement & de l'équilibre des corps ſolides. Nous réſervons pour le volume ſuivant les applications de ces principes, aux différens cas de mouvement & d'équilibre qui peuvent ſe rencontrer dans l'uſage; & nous paſſons à l'équilibre des fluides.





DE L'ÉQUILIBRE *DES FLUIDES*, ET DES CORPS QUI Y SONT PLONGÉS.

292. Quoique nous ignorions jusqu'où va le degré de ténuité des parties des fluides, nous ne pouvons douter néanmoins que ces parties ne soient matérielles ; & que par cette raison, la loi générale d'équilibre & celle de mouvement que nous avons établies ci-dessus, ne leur conviennent comme aux corps solides. Mais cette loi d'équilibre n'étant pas la seule nécessaire, ainsi que nous l'avons déja dit ; il nous faut examiner s'il n'y a point quelqu'autre loi générale dont cet équilibre peut dépendre.

293. Comme l'équilibre consiste dans la destruction de toutes les forces, & que nous ignorons

la manière dont les parties des fluides se transmettent leurs forces les unes aux autres, ce n'est qu'à l'expérience que nous devons avoir recours, pour établir nos premiers principes : nous commencerons donc par exposer ce que l'on connoît, par expérience, de plus certain sur cette matière. Mais auparavant, nous observerons qu'il faut distinguer deux sortes de fluides. Les uns dont les parties sont ou peuvent être regardées comme absolument dures, & qui, prises en masse, sont incompressibles; c'est-à-dire, ne peuvent être réduites à occuper un volume plus petit que celui qu'elles occupent dans leur état naturel; telle est l'eau, & telles sont la plupart des liqueurs. Les autres sont composés de parties compressibles & élastiques, c'est-à-dire, capables d'occuper un espace plus petit, lorsqu'on les comprime, & de reprendre leur premier état, lorsque la cause qui les réduisoit à un plus petit volume, cesse d'agir; tel est l'air. Nous parlerons d'abord des fluides incompressibles.

294. Voyons maintenant ce que l'expérience peut nous apprendre sur l'équilibre des fluides.

Soit *ABCD* (*fig.* 82 & 83) un canal composé de trois branches *AB*, *BC*, *CD* d'un diamètre égal. Si l'on conçoit que dans chacun de ces deux canaux, on verse de l'eau par la branche

AB, elle passera de la branche *BC* dans la branche *CD*; & lorsqu'on aura cessé de verser, la surface de l'eau contenue dans chaque branche, se trouvera dans une même ligne horizontale *AD* ou *EF*, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison de la branche *BC*. C'est un fait très-connu, & que nous prenons pour principe. Voici maintenant les conséquences que ce fait nous fournit.

295. Le canal *ABCD* étant rempli jusqu'en *AD*, si par tel point *E* que l'on voudra, on imagine l'horizontale *EF*, il est visible que le poids de l'eau contenue dans *EBCF*, ne contribue en rien à soutenir les colonnes *AE* & *DF*: puisque l'expérience fait voir que si l'eau n'atteignoit que le point *E* dans la branche *AB*, elle n'atteindroit que le point *F* dans la branche *DC*, & que par conséquent le canal *EBCF* est de lui-même en équilibre; donc l'équilibre dans le canal total auroit encore lieu si le fluide contenu dans *EBCF* perdoit tout-à-coup sa pesanteur. On doit donc regarder ce fluide comme étant seulement un moyen de communication entre la colonne *AE* & la colonne *DF*; ensorte qu'il transmet à la colonne *DF* toute la pression que la colonne *AE* exerce sur lui; & réciproquement il transmet à celle-ci la pression que *DF* exerce sur lui.

Il n'eſt pas moins évident que la même choſe auroit lieu, ſi au lieu de la colonne AE & de la colonne DF on ſubſtituoit deux preſſions de même valeur : on peut donc de-là, conclure en général, que *ſi un fluide ſans peſanteur eſt renfermé dans un vaſe quelconque ; & qu'ayant fait une ouverture à ce vaſe, on applique une preſſion quelconque à cette ouverture, cette preſſion ſe répandra également dans tous les ſens.* Puiſque l'inclinaiſon de la branche BC (*fig.* 83) n'empêche pas que les choſes ne ſe paſſent de la même manière que dans la *fig.* 82.

296. Il eſt facile de voir maintenant, que non-ſeulement la preſſion ſe tranſmet également dans tous les ſens ; mais encore qu'elle agit perpendiculairement ſur chaque point de la ſurface du vaſe qui renferme le fluide. Car ſi la preſſion qui agit ſur la ſurface, n'agiſſoit point perpendiculairement, il eſt facile de voir qu'elle ne pourroit être détruite entièrement par la réſiſtance de cette ſurface, que nous ſuppoſons d'ailleurs ſans frottement ; il en réſulteroit donc une action ſur les parties du fluide même, laquelle ne pouvant manquer de ſe tranſmettre dans tous les ſens (294), occaſionneroit néceſſairement du mouvement dans le fluide ; il ne ſeroit donc jamais poſſible qu'un fluide reſtât en équilibre dans un vaſe ; ce qui eſt contraire à l'expérience.

297. Concluons donc de-là que si les parties d'un fluide contenu dans un vase quelconque *ABCD* (*fig.* 84) ouvert vers la partie *AD*, sont sollicitées par des forces quelconques, & demeurent néanmoins en équilibre, ces forces doivent être perpendiculaires à la surface *AD*; car s'il y a équilibre, cet équilibre ne subsistera pas moins si l'on applique une enveloppe de même figure que la surface *AD*; or nous venons de voir que dans ce cas, les forces qui agissent sur la surface *AD* doivent être perpendiculaires à cette surface.

298. Supposons donc que les forces qui agissent sur les parties du fluide, sont la pesanteur même; & alors nous conclurons que la direction de la pesanteur est nécessairement perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles; & que par conséquent *les parties d'un même fluide pesant doivent être de niveau pour être en équilibre, quelle que soit d'ailleurs la figure du vase qui les renferme.*

299. Concevons maintenant, que le vase *ABCD* (*fig.* 85) étant fermé de toutes parts, soit rempli d'un fluide sans pesanteur; & qu'ayant fait une très-petite ouverture en *E*, on y applique une pression quelconque; il est évident que la pression qui en résultera sur la surface plane représentée

par *BC*, ne dépendra nullement de la quantité de fluide contenu dans ce vaſe, ni de la figure du vaſe; mais que puiſque la preſſion appliquée en *E* ſe tranſmet également dans tous les ſens (295), celle de *BC* ſera égale à la preſſion qui agit en *E*, répétée autant de fois qu'il y a de points dans *BC*.

300. Par la même raiſon, la preſſion appliquée en *E* agira pour écarter le fond ſupérieur *AD*; & la force avec laquelle elle agira, ſera, pour chaque point, égale à la preſſion qui agit en *E*; enſorte que le fond *AD* eſt preſſé perpendiculairement du dedans au dehors avec une force égale à la preſſion qui agit en *E*, répétée autant de fois qu'il y a de points dans *AD*.

301. Imaginons maintenant que le vaſe....... *ABCDEF* (*fig.* 86), dont la partie *CD* eſt horizontale, ſoit rempli d'un fluide peſant. Je dis que la preſſion qui en réſulte ſur le fond *CD*, ne dépend nullement de la quantité de fluide contenue dans le vaſe, mais ſeulement de la grandeur de *CD*, & de la hauteur de la ſurface *AF*, au-deſſus de la baſe *CD*.

En effet, concevons l'horizontale *BE*, & imaginons que le fluide contenu dans *BCDE*, devienne tout-à-coup ſans peſanteur; il eſt évident, par ce qu'on vient de dire (299), qu'un filet

vertical quelconque *IK* du fluide pesant contenu dans *ABEF*, exerce au point *K*, une pression qui doit se répandre également dans tout le fluide *BCDE*; que cette pression agit également de bas en haut pour repousser l'action de chacun des autres filets qui répondent verticalement aux différents points de *BE*; donc le filet *IK* fait, lui seul, équilibre à tous les autres filets de la masse *ABEF*; donc la masse *BCDE* étant toujours supposée sans pesanteur, il ne résulte d'autre pression au fond *CD*, que celle du filet *IK*, laquelle se transmettant également à tous les points de *CD*, y occasionne une pression égale à celle qui s'exerce au point *K*, répétée autant de fois qu'il y a de points dans *CD*.

Donc si on imagine (*fig.* 87) un fluide pesant contenu dans *ACDF*, divisé en tranches horizontales; la tranche supérieure ne communique pas au fond *CD* d'autre action que celle que communiqueroit le filet *ab* de même hauteur que cette tranche; & la même chose ayant lieu pour chaque tranche, le fond *CD* n'est donc pressé que comme il le seroit par la somme des filets *ab*, *bc*, *cd*, &c. & puisque cette pression se transmet également à tous les points de *CD*, elle est donc égale à *CD* multipliée par la somme des pressions que les filets *ab*, *bc*, *cd* sont capables d'exercer sur un même point.

Donc 1° *si le fluide* ACDF *est homogène, c'est-à-dire, composé de parties de même nature, de même pesanteur, &c. la pression sur le fonds* CD, *sera exprimée par* CD × ag; *c'est-à-dire, sera mesurée par le poids du prisme ou du cylindre qui auroit* CD *pour base &* ag *pour hauteur.*

2°. *Si le fluide est composé de tranches de différentes densités, la pression sur* CD *sera exprimée par* CD *multipliée par la somme des pesanteurs spécifiques de chaque tranche;* je dis par la somme des pesanteurs spécifiques * & non par la somme des poids; car ce n'est point de la quantité de fluide contenue dans chaque tranche, que dépend la pression, mais seulement de la pesanteur propre d'un filet.

Il faut bien observer que ce que nous disons ici, a lieu, soit que le vase aille en s'élargissant par en haut, soit qu'il aille en se rétrécissant, comme dans la *figure* 88. La pression que le fluide renfermé dans *ACDF*, exerce sur *CD*, est la même que celle qu'exerceroit le cylindre *ECDG*, s'il étoit rempli de fluide à même hauteur.

302. De ce qui précède, il est facile de conclure que si deux fluides *NHCBFL* & *EFLM*

* On doit se rappeller ici ce que nous avons déja dit ailleurs, que la pesanteur spécifique d'une matière quelconque, est la pesanteur absolue d'un volume connu de cette matière.

(*fig.* 89) homogènes chacun, mais de différente densité, l'un à l'égard de l'autre, se communiquent en FL, dans un vase quelconque, ils ne peuvent être en équilibre qu'autant que leurs hauteurs EF, IK, au-dessus du point horizontal FL de séparation, seront en raison inverse de leurs pesanteurs spécifiques. En effet, le fluide $LFBCGO$ pouvant être de lui-même en équilibre (298), il faut que $NHGO$ puisse faire équilibre à $EFLM$; il faut donc que la pression que $NHGO$ exerce de bas en haut sur FL soit égale à celle que $EFLM$ exerce de haut en bas sur FL. Or (301) la pression que $NHGO$ exerce sur FL, est égale au poids d'un prisme ou d'un cylindre de ce fluide, qui auroit IK pour hauteur, & FL pour base; d'ailleurs ce poids est égal à la pesanteur spécifique multipliée par le volume; donc si on nomme P cette pesanteur spécifique, il aura pour expression $P \times IK \times FL$. Par la même raison, si l'on nomme p la pesanteur spécifique du fluide $EFLM$, on aura $p \times EF \times FL$ pour la pesanteur absolue de ce fluide, ou pour la pression qu'il exerce sur FL. Il faudra donc que $P \times IK \times FL = p \times EF \times FL$, ou que $P \times IK = p \times EF$; donc $P : p :: EF : IK$; les hauteurs EF, IK doivent donc être en raison inverse des pesanteurs spécifiques.

Ainsi, par exemple, si *LFBCHN* étoit du mercure, & *EFLM* de l'eau; comme le mercure est quatorze fois aussi pesant que l'eau, il faudroit que la hauteur *IK* fût quatorze fois plus petite que *EF*; c'est-à-dire, fût la quatorzième partie de *EF*, quelque figure qu'ait d'ailleurs le vase.

303. Par ce que nous avons dit jusqu'ici, on voit donc que la manière d'agir des fluides est bien différente de celle des solides: Il n'y a, à proprement parler, (*fig.* 87) que la partie *ECDG* qui exerce son action sur la surface *CD*; & (*fig.* 88) la surface *CD* est pressée par *ACDF* comme elle le seroit par tout le poids du fluide contenu dans le cylindre *ECDG*; au lieu que si c'étoit un solide, si par exemple, le fluide *ACDF* venoit à se glacer, le fonds supporteroit une pression égale au poids de la totalité *ACDF* (*fig.* 87) & au poids de *ACDF* seulement (*fig.* 88).

304. Mais il faut bien distinguer ici, entre la pression que le fonds *CD* éprouve de la part du fluide, & celle que l'on auroit à soutenir si l'on vouloit porter le vase. Il est sûr que si le fonds *CD* venoit à se détacher, il ne faudroit employer autre chose pour l'arrêter (*fig.* 87) qu'un effort égal au poids du cylindre *ECDG*; mais si l'on vouloit porter le vase, il faudroit employer un effort égal au poids de l'eau contenue dans tout le vase, c'est ce qu'on va voir après que nous aurons donné la manière d'évaluer la pression sur les surfaces planes obliques, & sur les surfaces courbes.

305. Soit *ACDF* (*fig.* 90 & 91) la coupe verticale d'un vase terminé par des surfaces planes ou courbes, inclinées comme on le voudra, à

l'horizon. Si l'on conçoit une tranche infiniment mince *abde*, on peut faire abstraction de la pesanteur de cette tranche; & considérer cette tranche comme pressée par le fluide supérieur. Or cette pression se répand également à tous les points de la tranche, & agit perpendiculairement & également sur chacun des points des faces *ac*, *bd*. Donc puisque (301) cette force est celle que le filet seul *IK* feroit naître, la pression qui s'exerce perpendiculairement sur *bd* sera exprimée par $bd \times IK$; & il est évident qu'il en sera de même si au lieu de regarder *bd* comme une petite ligne droite, on la regarde comme une petite surface.

306. C'est donc à dire, en général, que *la pression qui s'exerce perpendiculairement sur une surface infiniment petite quelconque, par un fluide pesant & homogène, s'estime par le produit de cette surface, multipliée par sa distance à la ligne de niveau* AF, *& par la pesanteur spécifique de ce fluide.*

307. Donc la pression totale qui s'exerce sur une surface plane quelconque située comme on le voudra, est égale à la somme des produits des parties infiniment petites de cette surface, multipliées chacune par sa distance au plan de niveau,

ou à la ſurface ſupérieure du fluide, & par la peſanteur ſpécifique de ce fluide. Mais par la nature du centre de gravité, la ſomme des produits de chaque partie par ſa diſtance à un plan fixe, eſt égale au produit de la ſurface totale, multipliée par la diſtance de ſon centre de gravité au même plan; donc *la preſſion qu'un fluide peſant exerce contre une ſurface plane oblique, a pour meſure le produit de cette ſurface par la diſtance de ſon centre de gravité au plan de niveau, & par la peſanteur ſpécifique du fluide.*

308. Comme les preſſions qui s'exercent ſur chaque point d'une même ſurface plane, ſont perpendiculaires à la ſurface, & par conſéquent parallèles entr'elles, la réſultante ou la preſſion totale doit (206) leur être parallèle; or, comme nous venons de déterminer ſa valeur, ainſi que celles de chacune des preſſions partielles, il ſera aiſé, par ce qui a été dit (219), de déterminer quand on en aura beſoin, par où paſſe cette réſultante, qui, comme il eſt aiſé de le voir, ne doit point paſſer par le centre de gravité G de cette ſurface (*fig.* 92), mais à quelque diſtance au-deſſous. Il n'y a que dans le cas où la ſurface eſt infiniment petite, qu'on peut ſuppoſer que la preſſion totale paſſe par le centre de gravité de cette ſurface inclinée.

309. Voyons maintenant ce qui résulte de toutes ces pressions, dans le sens vertical & dans le sens horizontal.

Quelle que soit la figure d'un corps, on peut toujours concevoir ce corps, comme l'assemblage d'une infinité de tranches parallèles entr'elles, & se représenter la surface du contour de chaque tranche, comme l'assemblage de plusieurs trapèzes, dont le nombre est infini, quand la surface est courbe. Ainsi, pour évaluer ce qui résulte de la pression qu'un fluide exerce, soit sur les parois intérieures d'un vase, soit sur la surface extérieure d'un solide qu'on auroit plongé dans ce fluide, il faut évaluer ce qui résulte de la pression sur la surface d'un trapèze d'une hauteur infiniment petite.

Concevons donc (*fig.* 93) un trapèze $ABCD$ dont les deux côtés parallèles soient AB & CD, & dont la hauteur soit infiniment petite. Qu'au centre de gravité G de ce trapèze, on ait appliqué perpendiculairement à son plan, une force P dont la valeur soit exprimée par le produit de la surface de ce trapèze, multipliée par la distance GG' de son centre de gravité à un plan horizontal XZ.

Pour déterminer l'effet de cette force, tant dans le sens horizontal, que dans le sens vertical, je conçois par la ligne CD un plan vertical $CDFE$, & par la ligne AB que je suppose horizontale,

j'imagine le plan horizontal *AFEB*. Et ayant mené les lignes verticales *CE*, *BF* qui rencontrent ce plan en *E* & en *F*, je mène *BE* & *AF*; enfin, par la direction *GP* de la force *P*, je conçois un plan *KIH* auquel *CD* soit perpendiculaire, & dont *HGK* & *HI* sont les intersections avec les deux plans *ABCD*, *FECD*; ce plan sera perpendiculaire aux plans *ABCD*, *FECD* (*Géom.* 190), puisque *CD* est leur intersection commune; enfin du point *K* pris sur *AB* & *HK*, je mène *KI* perpendiculaire au plan *FECD*; cette ligne ne peut manquer d'être perpendiculaire à *HI*.

Cela posé, je décompose la force *P* en deux autres qui soient dans le plan *KIH* prolongé, & dont l'une *GL* soit horizontale ou perpendiculaire au plan *FECD*, & l'autre, *GM*, soit verticale. J'aurai donc en nommant *L* & *M* ces deux forces, & formant le parallélogramme *GMNL* sur la ligne *GN* prise arbitrairement pour diagonale, j'aurai (201) $P : L : M :: GN : GL : GM$, ou $:: GN : GL : LN$. Mais comme le triangle *GLN* a ses côtés perpendiculaires sur ceux du triangle *KIH*, ces deux triangles sont semblables (*Géom.* 111), & l'on a $GN : GL : LN :: HK : HI : IK$; donc $P : L : M :: HK : HI : IK$. Multiplions ces trois derniers termes par $\frac{AB + CD}{2} \times GG'$, ce qui ne changera point

leur rapport ; & nous aurons $P : L : M :: HK \times \frac{AB + CD}{2} \times GG' : HI \times \frac{AB + CD}{2} \times GG' : IK \times \frac{AB + CD}{2} \times GG'$.

Obſervons maintenant 1° que $HK \times \frac{AB + CD}{2}$ eſt la ſurface du trapèze $ABCD$. 2°. Que puiſque CE & DF ſont parallèles, & qu'il en eſt de même de CD & EF, on a $CD = EF$; donc $IK \times \frac{AB + CD}{2}$ eſt la même choſe que $IK \times \frac{AB + EF}{2}$, & par conſéquent eſt la ſurface du trapèze $AFEB$. 3°. Et comme on ſuppoſe que la hauteur du trapèze $ABCD$ eſt infiniment petite, EF qui eſt égale à CD, peut être priſe à la place de AB & de CD, enſorte que $HI \times \frac{AB + CD}{2}$ ſe réduit à $HI \times EF$ qui eſt la ſurface du rectangle $ECDF$. On a donc $P : L : M :: ABCD \times GG' : ECDF \times GG' : AFEB \times GG'$. Mais nous avons ſuppoſé que la force P étoit exprimée par $ABCD \times GG'$; donc la force L eſt exprimée par $ECDF \times GG'$; & la force M eſt exprimée par $AFEB \times GG'$.

310. Concevons maintenant que des angles A, D, C, B, on ait mené des perpendiculaires ſur le plan XZ. On peut ſe repréſenter ces per-

pendiculaires, comme les arêtes d'un prisme tronqué dont la base horizontale sur le plan XZ, seroit égale à $AFEB$, & dont la base inclinée est $ABCD$. Or comme AB & CD sont supposées infiniment proches, la solidité de ce prisme tronqué n'est pas censée différer de celle du prisme qui auroit la même base horizontale, & qui auroit GG' pour hauteur; mais cette dernière auroit pour expression $AFEB \times GG'$ qui est précisément celle que nous venons de trouver pour la force verticale M; donc cette force a aussi pour expression la solidité du prisme tronqué qui a pour base inclinée $ABCD$, & pour base horizontale la projection de $ABCD$ sur le plan horizontal XZ.

311. Imaginons actuellement un solide quelconque, coupé en une infinité de tranches horizontales, telles que $ABDEabde$ (*fig.* 94), & que perpendiculairement au centre de gravité de la surface de chaque trapèze dont on peut imaginer que la surface du contour de cette tranche est composée, on ait appliqué des forces représentées chacune par le produit de la surface du trapèze correspondant, multipliée par la distance de son centre de gravité à un plan horizontal XZ. Ces forces feront les pressions qu'un fluide pesant exerceroit sur la surface intérieure de la tranche $ABDEabde$

d'un vafe dans lequel il feroit contenu ; elles feroient auffi les preffions qu'un pareil fluide exerceroit fur la furface extérieure d'un folide qui y feroit plongé. Or nous venons de voir que fi l'on décompofoit ces forces en deux autres, l'une verticale, & l'autre horizontale ; chaque force verticale feroit repréfentée par le prifme tronqué qui a pour bafe dans le plan horizontal *XZ*, la projection du trapèze fur ce plan, & qui a pour bafe inclinée ce trapèze même. Donc la fomme des forces verticales, ou la force verticale unique qui en réfulte, fera repréfentée par la fomme de tous ces prifmes tronqués ; & comme la même chofe doit s'entendre de chaque tranche horizontale ; il faut donc en conclure.

1°. Que *fi un vafe de figure quelconque* ACDF (fig. 86) *eft rempli de fluide jufqu'à la ligne quelconque* AF, *il ne réfulte de toutes les preffions que le fluide exerce fur chacun de fes points, d'autre force verticale, qu'une force repréfentée par la folidité ou plutôt par le poids du volume que le fluide occupe.*

2°. Que *fi un corps tel que* AEDBM (fig. 95), *dont* AIBF *eft la plus grande coupe horizontale, eft plongé dans un fluide à une profondeur quelconque, & que l'on faffe abftraction de la preffion qui s'exerceroit fur la partie fupérieure* AMB ; *l'effort vertical du fluide pour le foulever, eft égal au poids du volume du fluide qui feroit compris entre le niveau*

XZ, la surface AIBFE, & la surface convexe formée par les perpendiculaires abaissées de tous les points du contour AIBF, sur le plan XZ.

Si l'on considère ensuite la pression qui s'exerce sur la surface supérieure à la plus grande coupe horizontale, on voit par la même raison, qu'il résulteroit des pressions du fluide sur cette surface, qu'il en résulteroit, dis-je, dans le sens vertical, & pour pousser le corps en bas, un effort égal au poids du volume de fluide qui seroit compris entre cette même surface, celle *A'F'B'I'* de sa projection, & celle que forment les perpendiculaires menées de tous les points du contour *AIBF*. Donc si du premier effort vertical, on retranche le second, on voit que le corps est poussé verticalement de bas en haut, par un effort égal au poids du volume de fluide dont il occupe la place.

312. Concluons donc généralement, que *si un corps est plongé dans un fluide quelconque, il y perd une partie de son poids, égale au poids du volume de fluide qu'il déplace.*

313. Il nous reste maintenant deux choses à examiner; la première est de savoir par où passe l'effort vertical résultant des pressions du fluide : la seconde, ce que deviennent les forces horizontales.

Quant à la première, il eſt facile de voir que cet effort vertical doit paſſer par le centre de gravité du volume de fluide qui a été déplacé. En effet, ſi on conçoit ce volume décompoſé en une infinité de filets verticaux, l'effort que le fluide exerce pour pouſſer verticalement chaque filet, eſt exprimé (311) par le poids d'un volume de fluide égal à ce filet. Donc, pour avoir la diſtance de la réſultante, à un plan vertical quelconque, il faudroit multiplier la maſſe de chaque filet conſidérée comme de même nature que le fluide, par la diſtance à ce plan, & diviſer la ſomme de ces produits par la ſomme des filets; or c'eſt préciſément ce qu'il faut faire pour trouver la diſtance du centre de gravité du volume déplacé; donc en général *la pouſſée verticale d'un fluide ſur un corps qu'on y plonge, paſſe toujours par le centre de gravité du volume de fluide déplacé.*

314. Voyons maintenant ce que deviennent les forces horizontales dont nous avons parlé ci-deſſus.

Si l'on ſe repréſente toujours la tranche ſolide de la *figure* 94, & que par les côtés ab, bc, &c. de la ſection inférieure, on conçoive des plans verticaux terminés par la ſection ſupérieure; ces plans formeront le contour d'un priſme qui aura pour hauteur celle de la tranche; & chaque face de ce priſme, exprimera (309) par l'étendue de ſa ſurface,

la valeur de la force horizontale qui lui eſt perpendiculaire. Mais comme toutes ces forces ſont de même hauteur, leurs ſurfaces ſont dans la raiſon de leurs baſes, *ab*, *bc*, &c. donc les forces horizontales ſont entr'elles dans la raiſon des côtés *ab*, *bc*, &c. D'ailleurs à quelque endroit de ces faces qu'elles ſoient appliquées, comme ces faces ſont d'une hauteur infiniment petite, on peut regarder ces forces horizontales, comme appliquées, toutes, dans le plan horizontal *abcdef*, chacune perpendiculairement ſur le milieu du côté qui ſert de baſe à la face correſpondante du priſme dont il s'agit. Je dis ſur le milieu, parce qu'il eſt aiſé de voir que la réſultante des preſſions qui s'exercent ſur la ſurface de l'un quelconque des trapèzes qui forment la ſurface de la tranche, doit paſſer par l'un des points de la ligne qui joint les milieux des deux côtés parallèles; & que par conſéquent la force horizontale qui en réſulte, doit rencontrer la ligne qui joint les milieux de deux côtés oppoſés de la force correſpondante du priſme. La queſtion eſt donc réduite à ſavoir ce qui doit arriver à un polygone quelconque (*fig.* 96) lorſque chacun de ſes côtés eſt tiré ou pouſſé par une force appliquée perpendiculairement à ſon milieu, & repréſentée pour ſa valeur, par ce côté. Nous allons voir qu'elles ſe détruiſent mutuellement.

Ne considérons d'abord que deux forces P & Q, (*fig.* 97) appliquées perpendiculairement sur les milieux des deux côtés AB, AC du triangle ABC, & représentées par ces côtés. Il est clair que leur résultante passera par leur point de concours F, qui dans le cas présent est le centre du cercle qui passeroit par les trois points A, B, C (*Géom.* 55). Je dis d'ailleurs, qu'elle doit passer par le milieu du côté BC, auquel elle sera par conséquent perpendiculaire; & qu'elle sera représentée par ce côté BC.

En effet, si l'on décompose la force P en deux autres, l'une De parallèle, & l'autre Dh perpendiculaire au côté BC, en formant le parallélogramme $Degh$; on aura en nommant e & h ces deux forces, $P : e : h :: Dg : De : Dh :: Dg : De : ge$; or en abaissant la perpendiculaire AO, le triangle geD est semblable au triangle AOB, parce qu'ils ont les côtés perpendiculaires. On a donc $Dg : De : ge :: AB : AO : BO$; donc $P : e : h :: AB : AO : BO$. Or par la supposition, la valeur de la force P est représentée par AB; donc celle de e l'est par AO; & celle de h l'est par BO.

Si l'on décompose pareillement la force Q en deux autres, l'une Im parallèle, & l'autre Ik perpendiculaire au côté BC, on prouvera de même, que m est représentée par AO, & k par CO. Les

deux forces *m* & *e* ſont donc égales, puiſqu'elles ſont repréſentées par la même ligne *AO*. D'ailleurs elles agiſſent en ſens contraires, & ſuivant une même ligne *DI* parallèle à *BC*, puiſque *D* & *I* ſon les milieux de *AB*, *AC*; donc elles ſe détruiſent. La réſultante doit donc être la même que celle des deux forces *h* & *k*; & comme celles-ci ſont parallèles, puiſqu'elles ſont perpendiculaires à *BC*, que d'ailleurs elles agiſſent dans le même ſens, leur réſultante doit être égale à leur ſomme & perpendiculaire à *BC*. Donc 1° elle eſt repréſentée par $BO + OC$; c'eſt-à-dire, par *BC*. 2°. Etant perpendiculaire à *BC*, & devant d'ailleurs paſſer, ainſi que nous venons de le dire, par le centre *F* du cercle circonſcrit à *ABC*, elle paſſe donc par le milieu de *BC*.

Cela poſé, (*fig.* 96) la réſultante *V* des deux forces *P* & *T* ſera donc perpendiculaire ſur le milieu de *BE*, & repréſentée par *BE*. Par la même raiſon, la réſultante *X* des deux forces *V* & *S*, & par conſéquent celle des trois forces *P*, *T*, *S*, ſera perpendiculaire ſur le milieu de *BD*, & repréſentée par *BD*. Enfin la réſultante *Y* des deux forces *X* & *Q*, & par conſéquent, celle des quatre forces *P*, *T*, *S*, *Q*, ſera perpendiculaire ſur le milieu de *DC*, & repréſentée par *DC*; elle ſera donc égale & directement oppoſée à la force *R*; donc toutes ces forces ſe détruiront.

On voit que le raiſonnement eſt le même quels que ſoient le nombre & la grandeur des côtés.

Donc en général, *les efforts qui réſultent dans le ſens horizontal, de la preſſion qu'un fluide peſant exerce perpendiculairement ſur la ſurface d'un corps qui y eſt plongé, ſe détruiſent mutuellement.*

315. Tels ſont les principes qui ſervent à déterminer les effets de la preſſion des fluides ſur les vaſes qui les renferment, & ſur les corps qu'on y plonge. Voyons maintenant quelques uſages de ces principes.

Puiſque les efforts que le fluide fait dans le ſens horizontal, ſe détruiſent mutuellement, il ne faut donc pour conſerver un corps dans la poſition qu'on lui aura donnée dans un fluide, il ne faut, dis-je, autre choſe, que détruire l'effort vertical de la preſſion; ce qui exige deux choſes, la première, qu'on oppoſe de haut en bas un effort qui ſoit égal à celui que la preſſion exerce de bas en haut; la ſeconde, que cet effort ſoit en ligne droite avec celui de la pouſſée verticale du fluide. Or la pouſſée verticale du fluide, eſt équivalente au poids du volume de fluide déplacé; donc *ſi le volume de fluide déplacé, pèſe plus que le corps plongé, le corps ſurnagera & s'élèvera juſqu'à ce que le volume de fluide correſpondant à la partie ſubmergée, pèſe autant que le corps entier.*

aréomètres ou *pèse-liqueurs*. Ce sont des instrumens qui par la quantité dont ils s'enfoncent ou se relèvent dans certaines liqueurs, font connoître la pesanteur spécifique de ces liqueurs.

Pour en donner une idée, concevons que le cylindre creux *ABCD* (*fig.* 99) lesté dans sa partie inférieure DC avec une matière pesante quelconque, afin de lui faire conserver une situation verticale, soit plongé dans un fluide, & qu'il s'arrête de lui-même lorsqu'il est enfoncé de la quantité *ED*. Alors on est sûr (312) que le volume de fluide dont *EDCF* occupe la place, pèse autant que le corps entier *ADCB*. Donc si on connoît le poids absolu du corps *ADCB*, on a le poids d'un volume de fluide égal au cylindre *EDCF*. Donc si on évalue la solidité ou le volume *EDCF* en pouces cubes par exemple, & le poids de *ADCB* en onces; en divisant le poids de *ADCB* par le nombre des pouces cubes de *EDCF*, le quotient exprimera ce que pèse un pouce cube du fluide dont il s'agit.

Ayant ainsi déterminé la pesanteur spécifique d'un fluide, on détermine ensuite celle des autres, beaucoup plus promptement, en partant toujours des mêmes principes.

Concevons qu'ayant divisé le côté *AD* en plusieurs parties égales, on ait marqué le point *E* où le cylindre s'arrête dans le fluide qui a servi à la première expérience. Alors si en plongeant le cylindre dans un autre fluide, il s'enfonce de la quantité *De* plus grande ou plus petite que *DE*, on en conclura que le nouveau fluide est, au contraire, spécifiquement moins pesant ou plus pesant que le premier, dans le rapport de *De* à *DE*; c'est-à-dire (320) que la pesanteur spécifique du premier fluide est à celle du second, comme *De* : *DE*; ensorte que comparant les nombres de parties

de DA que comprennent DE & De, on aura le rapport des pesanteurs spécifiques des deux liqueurs ; ou bien encore, si ayant marqué au point E la pesanteur spécifique du fluide auquel on veut comparer tous les autres, on se propose de marquer aux différens points e les pesanteurs spécifiques des liqueurs dans lesquelles l'aréomètre plongeroit jusqu'en e; on divisera le nombre des parties égales de DE par le nombre des parties égales de De, & multipliant le quotient par la pesanteur spécifique qui correspond au point E, on aura celle qui correspond au point e; c'est-à-dire, le nombre qu'il faut écrire en e pour marquer la pesanteur spécifique du fluide dans lequel le cylindre s'arrêteroit à cette division.

Mais si on vouloit comparer les pesanteurs spécifiques de fluides peu différens en densité ; pour peu que le cylindre eut de largeur, il est clair que la différence des enfoncemens seroit d'autant plus petite, que la différence de densité seroit elle-même plus petite, & que le diamètre du cylindre seroit plus grand. Il faudroit donc alors employer un cylindre d'un diamètre fort petit ; mais pour lui conserver la stabilité, ou la faculté de se maintenir dans une situation verticale, alors on pourroit l'adapter comme on le voit (*fig.* 100) à un autre cylindre $GHIK$, lesté comme il a été dit ci-dessus.

Au reste, il n'est point nécessaire que la partie $GHIK$ soit cylindrique, non plus que la partie $ABCD$. La partie $GHIK$ peut avoir la forme que l'on voudra, pourvu qu'elle procure de la stabilité ; & la partie $ABCD$ peut être prismatique de telle figure que l'on voudra d'ailleurs. Il suffit qu'elle soit telle que des parties égales du volume $ABCD$ répondent à des parties égales de la longueur AC, ensorte qu'on peut donner à l'aréomètre la figure que l'on voit (*fig.* 101).

On peut varier à l'infini la construction & la forme de ces instrumens en partant toujours des mêmes principes. Mais après ce que nous venons de dire, nous ne ferons mention que de l'aréomètre représenté (*fig.* 101). Le précédent est destiné à marquer les pesanteurs spécifiques des liqueurs par ses différens enfoncemens; celui-ci les détermine par un enfoncement constant.

ABCD est une espèce de bouteille de verre creuse, à long col, lestée dans sa partie inférieure *C* avec un peu de mercure. L'extrémité *A* porte un bassin destiné à recevoir différens petits poids. *E* est une marque qui désigne le point où s'arrête l'aréomètre par son poids seul dans la liqueur la moins pesante.

Si on plonge cet aréomètre dans une autre liqueur plus pesante, il s'élèvera, & ne pourra être ramené au même enfoncement qu'en ajoutant des poids dans le bassin *A*. La quantité de ces poids qu'on ajoute fait connoître la différence de pesanteur spécifique entre le fluide actuel & le premier; ainsi connoissant la pesanteur spécifique du premier, on a celle de tout autre.

322. Si le corps pèse plus qu'un pareil volume de fluide; alors il doit s'enfoncer, & ne peut être retenu que par une force égale à l'excès de son poids sur celui d'un pareil volume de fluide. Or si nous représentons toujours par p & P les pesanteurs spécifiques du fluide & du corps; & par V, le volume du corps, nous aurons $PV - pV$ pour l'excès du poids du corps sur celui d'un pareil volume de fluide. Donc si on conçoit que ce corps

ſoit retenu, à l'aide d'un fil, au fléau d'une balance comme on le voit (*fig.* 102), & que P' ſoit le poids avec lequel il peut être en équilibre; on aura $P' = PV - pV$; d'où l'on tire $\frac{p}{P} = \frac{PV - P'}{PV}$. Or PV eſt le poids du corps dans l'air, & P' ſon poids lorſqu'il eſt plongé dans le fluide; donc *connoiſſant le poids d'un corps dans l'air, & ſon poids dans un fluide, on aura aiſément le rapport des peſanteurs ſpécifiques de ce dernier fluide & du corps, en diviſant la différence de ces deux poids, par le poids du corps dans l'air.*

Par exemple, ſi un corps pèſe 6 onces dans l'air & 5 onces dans l'eau, je diviſe la différence 1, par 6, & le quotient $\frac{1}{6}$, me fait voir que la peſanteur ſpécifique du corps, eſt à celle du fluide, comme 6 eſt à 1.

L'air, comme fluide peſant, diminue auſſi une partie du poids des corps; enſorte que le poids qu'ils ont dans l'air n'eſt pas leur poids réel. Mais comme l'air eſt un fluide fort rare, & dont la peſanteur ſpécifique n'eſt qu'environ la 850e partie de celle de l'eau, on peut ſe diſpenſer d'avoir égard à la diminution qu'il occaſionne.

323. Si l'on conçoit qu'on plonge le même corps que ci-deſſus, dans un autre fluide dont la peſanteur ſpécifique ſoit p', & que P'' ſoit le poids

avec lequel il peut alors être en équilibre ; de même qu'on a eu $P' = PV - pV$, on aura $P'' = PV - p'V$; or ces deux équations donnent $pV = PV - P'$, & $p'V = PV - P''$; donc divisant cette dernière par la précédente, on aura $\frac{p'}{p} = \frac{PV - P''}{PV - P'}$; d'où connoissant le poids PV d'un corps dans l'air, son poids P'' dans un fluide, & son poids P' dans un autre fluide, on déterminera facilement $\frac{p'}{p}$, c'est-à-dire, le rapport des pesanteurs spécifiques des deux fluides.

C'est d'après ces principes que l'on peut construire une Table des pesanteurs spécifiques des différens corps tant solides que fluides. On en trouvera une à la fin de ce volume.

324. Suivant ce que nous venons de voir, la pesanteur spécifique multipliée par le volume, donne le poids absolu d'un corps. Mais la densité multipliée par le volume donne la masse (160), qui (171) est proportionnelle au poids. Donc la pesanteur spécifique multipliée par le volume, est proportionnelle à la densité multipliée par le volume ; donc *la pesanteur spécifique des corps est proportionnelle à leur densité.*

325. Revenons aux corps qui surnagent. Pour

qu'un corps puiſſe reſter en équilibre ſur un fluide, il faut, ainſi que nous l'avons vu (315), que ſon poids total ſoit égal à celui du volume de fluide déplacé. Mais cette condition ne ſuffit pas. *Il faut encore, que la ligne qui paſſe par le centre de gravité du corps plongé, & par le centre de gravité du volume de la partie ſubmergée, ſoit verticale.*

Car la peſanteur du corps, & la pouſſée du fluide s'exerçant chacune ſuivant une ligne verticale, dont la première paſſe par le centre de gravité du corps, & la ſeconde, par le centre de gravité du volume déplacé, ne peuvent être directement oppoſées, (comme il faut qu'elles le ſoient pour l'équilibre) qu'autant que ces deux verticales ſe confondront.

326. Ainſi, pour déterminer ſi un corps..... *ACEDB* (*fig.* 103) d'une forme & d'une matière connue, peut demeurer en équilibre ſur un fluide, dans une poſition qu'on a deſſein de lui donner; il faut mener un plan horizontal *CD* qui ſépare une partie *CED* dont le volume ſoit au volume total *AEB*, comme la peſanteur ſpécifique du corps eſt à celle du fluide; & ayant déterminé le centre de gravité *G* de *AEB*, & celui *G'* de *CED*, ſi la ligne *GG'* eſt perpendiculaire au plan *CD*, l'équilibre aura lieu.

327. Nous ſuppoſons dans ce que nous diſons ici, que le corps *AEB* eſt homogène; c'eſt-à-dire,

que la matière qui compose son poids est toute de même espèce, & qu'elle est uniformément répandue dans tout l'espace qu'occupe le volume total. S'il n'en étoit pas ainsi, on commenceroit par calculer la valeur d'un volume de fluide, égal en poids, au poids total de *AEB*, & l'on feroit *CED* égal à ce volume, *CD* étant horizontale; ce qui se réduit à une question de pure Géométrie, dont les principes, donnés jusqu'ici, peuvent fournir la solution.

328. C'est encore une autre question que l'on peut résoudre à l'aide des mêmes principes, que celle de déterminer les différentes positions dans lesquelles un corps peut rester en équilibre sur un fluide; mais comme nous n'avons aucune application essentielle à faire ni de l'une ni de l'autre de ces deux questions, nous ne nous en occuperons pas.

329. Le corps *CED* (*fig.* 104) étant actuellement en équilibre sur un fluide dont *AB* est la surface; G étant le centre de gravité de ce corps; G' celui de la partie submergée *AEB*; si l'on conçoit que l'on incline infiniment peu le corps, en sorte que *aEb* devienne la partie submergée, dont G'' soit le centre de gravité. Ce corps reviendra à sa première position, si la verticale $G''M$ qui

convient à cette seconde position, rencontre la verticale $G'M$ qui convient à la première, au-dessus du centre de gravité G du corps. Au contraire il versera tout-à-fait, si le point M est au-dessous de G, comme en M'.

En effet, la direction $G''M$ qu'aura alors la poussée de l'eau, & qui sera verticale, ne passant point par le centre de gravité G, tend (290) à imprimer au corps deux mouvemens, l'un pour élever le centre de gravité, & qui est détruit par le poids du corps; l'autre qui tend à le faire tourner autour du centre de gravité G. Or il est facile de voir que si le point G est au-dessous de M, ce mouvement de rotation autour de G, tend à se faire de A vers C, & par conséquent à ramener G' dans la verticale actuelle $G''M$. Au contraire, si M est au-dessous de G, comme en M'; le mouvement de rotation autour de G, tend à se faire de C vers A, & par conséquent ne peut qu'éloigner G' de G''; c'est-à-dire, tend à faire renverser le corps.

Donc pour que le corps puisse revenir à sa situation primitive, il faut que $G'M$ soit plus grande que $G'G$.

Le point M est ce qu'on appelle le *Métacentre*; parce que c'est la limite de la hauteur à laquelle peut être placé le centre de gravité G, pour que

le corps flottant ne ſoit pas renverſé par une petite inclinaiſon ; car pour peu que G fût au-deſſus du point M, le corps ſe renverſeroit.

330. Les fluides élaſtiques ont de commun avec les fluides ſans reſſort, qu'abſtraction faite de la peſanteur, la preſſion ſe communique également dans tous les ſens. Mais ils diffèrent de ces derniers, en ce que ſi après avoir appliqué à la ſurface AB (*fig.* 105) d'un fluide ſans reſſort, une preſſion quelconque P, qui agiſſe ſur un fonds mobile AB, on vient à ſupprimer ſubitement ce poids P, le fluide n'agira pas contre le fonds AB. Au lieu que dans les fluides à reſſort, ſi après que la preſſion P aura amené le fonds AB dans la ſituation quelconque ab, on vient à ſupprimer cette preſſion, le fonds ab ſera repouſſé de b vers B avec la même force qui l'avoit amené de B en b.

Quoi qu'il en ſoit, la manière dont la preſſion ſe diſtribuera, ſera toujours la même que pour les fluides ſans reſſort ; c'eſt-à-dire, qu'elle agira perpendiculairement aux ſurfaces ; & que dans les fluides élaſtiques peſans, & qui ne ſont comprimés que par l'action de leur peſanteur, les efforts de la preſſion ſur les parois des vaſes, ou ſur la ſurface des corps plongés dans ces fluides, ces efforts, dis-je, eſtimés dans le ſens horizontal, ſe détruiront mutuellement ; & dans le ſens vertical, ils ſe réduiront

à un seul dont la direction passera par le centre de gravité du volume sur lequel le fluide agit.

331. Quant à la valeur absolue de la pression sur une surface quelconque, en vertu de la pesanteur seule du fluide élastique; il n'est pas douteux que sur les surfaces horizontales, elle ne soit, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnelle aux surfaces sur lesquelles elle s'exerce. Mais elle ne se mesure pas, comme dans les autres fluides, par le poids du prisme, ou du cylindre qui auroit pour base cette surface; & pour hauteur, la distance de cette surface jusqu'à la surface supérieure du fluide.

En effet, si un fluide élastique est tel que sans sa pesanteur, il puisse occuper l'espace *AEFB* (*fig.* 106); lorsqu'on le supposera pesant, il est visible que les tranches de ce fluide, les plus proches du fonds *EF*, chargées de leur propre poids, & de celui des tranches supérieures, seront plus comprimées que celles-ci; que par conséquent, si l'on conçoit deux tranches de même hauteur, l'une près du fonds *EF*; l'autre à quelque distance de ce fonds, la matière de la première sera plus dense que celle de la seconde, & pèsera par conséquent davantage. Ainsi les tranches de même hauteur chargeant le fonds *EF*, d'autant moins qu'elles en sont plus éloignées, la pression sur le fonds *EF* doit s'estimer,

non-ſeulement par la grandeur de ce fonds, & par le nombre des tranches contenues de D en F, mais encore par la peſanteur ſpécifique de chaque tranche, laquelle eſt différente d'un endroit à l'autre. Enſorte que ſi l'on repréſente par x la diſtance FQ d'une tranche quelconque, au fonds EF; par dx la hauteur infiniment petite de cette tranche, & par D la peſanteur ſpécifique, ou la denſité de cette même tranche; Ddx ſera le poids d'un filet de cette tranche; & ſon action ſur EF, ſera $EF \times Ddx$; donc l'action de toutes les tranches, ou la preſſion ſur EF, ſera $EF\int Ddx$; c'eſt-à-dire, qu'il faudra prendre l'intégrale de Ddx, & la multiplier par EF. Il faudra donc connoître la valeur de D en x, c'eſt-à-dire, ſuivant quelle loi les denſités varient, à meſure que les tranches ſont plus éloignées du fonds EF.

Quand on aura déterminé la preſſion ſur une ſurface horizontale, il ſera aiſé de déterminer la preſſion, ſur toute autre ſurface, en partageant cette ſurface en parties infiniment petites; chacune de ces parties pourra être regardée comme preſſée autant que ſi elle étoit horizontale.

332. De tous les fluides élaſtiques, l'air eſt celui qui nous intéreſſe le plus; c'eſt pourquoi nous allons nous arrêter à en conſidérer les principales

propriétés

propriétés ; celles du moins, qui ont le plus de rapport à notre objet.

333. *L'air est pesant.* C'est un fait constaté par un grand nombre d'expériences. En voici quelques-unes.

Si l'on prend un tube de verre (*fig.* 107) d'environ 30 pouces, fermé hermétiquement par l'une *A* de ses extrémités, & que par le bout ouvert on introduise du mercure dans toute la capacité ; si l'on vient à renverser & plonger le bout ouvert *B*, dans un vase où il y ait aussi du mercure ; le mercure contenu dans le tube, descendra jusqu'à ce que la colonne restante soit d'environ 27 pouces & demi *, à compter de la surface du mercure dans le vase.

Voici comment cette expérience prouve la pesanteur de l'air. La colonne de mercure contenue dans *CB* exerce au point *B* une pression sur le mercure inférieur qui ne peut être contre-balancée que par un effort égal agissant en sens contraire. Or le mercure contenu dans le vase où le tube est plongé, n'agit contre cette colonne, qu'à raison de la distance de sa surface supérieure jusqu'à l'ouverture *B* ; il ne peut donc contre-balancer. On ne peut donc chercher, ailleurs, l'effort nécessaire, que dans le fluide qui repose sur tous les points de la surface supérieure du mercure contenu dans le vase ; c'est-à-dire, qu'on doit la chercher dans l'air ; donc c'est l'air

* Cette quantité varie selon l'état de l'air, & la hauteur du lieu où se fait l'expérience ; nous supposons ici, que c'est lorsque l'air est dans un état moyen, & que l'on est, à peu près, au même niveau que Paris. Nous supposons de plus, que le mercure contenu dans le tube, a été purgé d'air ; ce n'est pas ici le lieu d'en exposer les moyens.

qui par son poids fait équilibre à la colonne *B C* de mercure.

Voici, d'ailleurs, un autre fait qui nous sera utile & qui vient à l'appui. Si c'est l'air qui soutient la colonne *B C*; il faut, si nous employons un fluide moins pesant que le mercure, que la hauteur à laquelle ce fluide restera suspendu, soit plus grande que *B C*, & cela (302) dans le rapport inverse des pesanteurs spécifiques de ces deux fluides. Or on sait que l'eau pèse quatorze fois moins que le mercure. Il faut donc que si l'on emploie de l'eau au lieu de mercure, elle puisse être soutenue par l'air, jusqu'à la hauteur de quatorze fois vingt-sept pouces & demi, c'est-à-dire, jusqu'à trente-deux pieds environ. C'est en effet, ce que l'expérience confirme. Car on sait que si par le moyen d'un piston on veut élever l'eau dans un seul corps de pompe, au-delà de trente-deux pieds, l'eau s'arrête constamment à ce terme à très-peu près. On ne peut donc douter que l'air ne soit pesant, & que par cette raison, il ne presse la surface des corps, autant que le feroit une colonne d'eau dont la base seroit égale à cette surface, & dont la hauteur seroit de trente-deux pieds environ.

C'est cette pression qui, appliquée à tous les corps, & par conséquent à la surface de l'eau, oblige l'eau de monter dans les pompes, lorsqu'en tirant le piston on fait un vide entre le piston & l'eau dans laquelle plonge la pompe. Mais pour avoir des idées plus distinctes sur la manière dont l'eau s'élève dans les pompes, il faut examiner une autre propriété de l'air. C'est son élasticité.

334. *L'air est compressible ; il est élastique ; & les volumes auxquels il peut être réduit par la*

compreſſion, ſont, ſenſiblement, en raiſon inverſe des poids dont il eſt chargé.

C'eſt un fait établi par l'expérience ſuivante.

Dans un tube de verre recourbé *A B C* (*fig.* 108) dont la branche *A B* ſoit au moins de trente ou quarante pouces, & dont la branche *B C* ſoit par-tout de même diamètre & fermée hermétiquement en *C*; faites couler du mercure juſqu'à ce que la capacité *B* la plus baſſe du tube ſoit remplie; & ayant appliqué ce tube ſur une planche graduée, obſervez quel eſt le nombre de diviſions compris entre *B* & *C*. Je ſuppoſe ici que ce ſoit huit pouces. Verſez du mercure dans la branche *A B*, juſqu'à ce que l'excès de la hauteur du mercure dans *A B*, ſur celle du mercure qui entrera dans *B C*, ſoit de vingt-ſept pouces & demi environ. L'air qui occupoit d'abord toute la partie *B C*, n'en occupera plus que la moitié. Si vous continuez de verſer du mercure dans la branche *A B*, juſqu'à ce que la différence des hauteurs du mercure dans les deux branches, ſoit de deux fois vingt-ſept pouces & demi, ou environ; l'air reſtant dans *B C* n'occupera plus que le tiers de *B C*; il n'occupera que le quart, ſi la différence des hauteurs eſt de trois fois vingt-ſept pouces & demi, ou environ; & ainſi de ſuite.

Cette expérience fait voir que l'air ſe comprime à meſure qu'on le charge, & qu'il ſe comprime, à très-peu près, proportionnellement aux poids.

En effet, lorſqu'il n'y avoit du mercure que dans la capacité inférieure *B*, l'air contenu dans *B C*, étant de même nature que celui qui étoit dans *A B*, étoit chargé de tout le poids de l'air qui répond verticalement à l'ouverture du

tube. Il étoit donc chargé par un poids équivalent à une colonne de mercure de vingt-sept pouces & demi environ. Puis donc qu'en ajoutant encore une, deux, trois, &c. pressions semblables, il se réduit, selon ce que nous venons de dire, à des espaces deux fois, trois fois, quatre fois moindres que *BC*, il se comprime donc, dans le rapport des poids qui le chargent.

Quant au ressort de l'air; par un procédé inverse on s'assure qu'il a lieu & qu'il augmente à proportion de la compression, ou qu'il diminue à proportion que la compression diminue.

Car si l'on retire du mercure de dedans la branche *AB*, on verra l'air reprendre de l'étendue dans la branche *CB*, & en reprendre d'autant plus, qu'on diminuera plus la pression; l'air est donc non-seulement compressible, mais dans quelqu'état de compression qu'on le mette, il tend à se rétablir & à occuper un espace plus grand, & tel que lorsque le poids qui le comprime diminue, l'espace dans lequel l'air se répand, est à celui auquel il étoit réduit, comme le poids dont il étoit chargé dans ce dernier cas, est à celui dont il est chargé actuellement.

335. L'air que nous appelons *naturel* ou *libre*, est donc dans une compression habituelle, & telle que s'il venoit à perdre tout-à-coup sa pesanteur, il tendroit à s'écarter de toutes parts avec une force telle que la partie d'air renfermée dans un espace comme *ABC* (*fig.* 108) ne pourroit être retenue qu'en appliquant à l'ouverture *A* une force égale

au poids d'une colonne de mercure qui auroit cette ouverture pour base, & 27 pouces & demi de hauteur.

336. D'après ce que nous avons dit (330) sur la différence entre les fluides élastiques & les fluides non élastiques, on voit donc que l'air renfermé de toutes parts dans un vase, fait autant d'efforts pour pousser du dedans au dehors, que l'air environnant en fait pour pousser du dehors en dedans; & c'est-là ce qui fait que les corps ne cèdent point à la pression considérable qu'ils éprouvent selon ce que nous avons dit (333).

337. Un tube tel que celui que nous avons décrit (333) (*fig.* 107) étant appliqué sur une planche graduée dont les divisions commencent à la ligne de niveau, ou à la surface du mercure dans le réservoir, est ce qu'on appelle le *Baromètre*; parce qu'il sert à juger de la pression que l'air exerce sur la surface des corps, par la hauteur à laquelle le mercure reste suspendu dans le tube *AB*.

On voit donc maintenant pourquoi cet instrument marque la même hauteur dans un endroit fermé, comme dans un endroit libre. C'est que l'air renfermé exerce par son ressort, la même pression sur le mercure contenu dans le réservoir, que s'il agissoit librement par son poids.

338. Le mercure ne se soutient pas constam-

ment à la même hauteur dans un même lieu. Il est, à Paris, tantôt un peu au-dessus de 27 pouces $\frac{1}{2}$, tantôt un peu au-dessous ; & cela, selon que la compression occasionnée ou par le poids, ou par le ressort de l'air, augmente ou diminue. Comme le ressort de l'air peut augmenter ou diminuer sans que son poids total augmente ou diminue, ainsi qu'il peut arriver par la chaleur ou par le froid ; on ne doit pas attribuer les variations du mercure dans le baromètre, uniquement aux changemens du poids de l'air.

Quoi qu'il en soit, puisque ces changemens annoncent que l'air est en état de faire équilibre à une colonne plus ou moins grande de mercure, & par conséquent à une colonne d'eau plus ou moins grande ; il faut en conclure que la plus grande hauteur à laquelle on puisse élever l'eau par le moyen d'une seule pompe, n'est pas constamment de 32 pieds ; mais qu'elle varie selon la hauteur du mercure dans le baromètre.

339. Si on porte le baromètre d'un lieu en un autre, plus élevé, ou plus bas ; le mercure s'abaissera dans le premier cas, & s'élèvera dans le second, Parce que la colonne d'air qui appuie sur le réservoir, étant plus courte dans le premier cas, & plus longue dans le second, doit peser moins dans le

premier cas, & plus dans le second; & par conséquent ne peut faire équilibre qu'à une colonne de mercure plus petite dans le premier cas, & plus grande dans le second. Ainsi, dans le premier cas, le tube se videra un peu dans le réservoir; & dans le second, le réservoir fournira le tube; c'est aussi ce que l'expérience a confirmé. Mais il faut observer que ces variations ne sont sensibles qu'à des changemens de hauteur, de quelques toises. On peut dire, en gros, que 12 toises de différence de hauteur répondent à une ligne de différence dans le baromètre.

Donc les plus grandes hauteurs auxquelles on peut élever l'eau par le moyen d'une seule pompe, varient suivant les hauteurs auxquelles on est élevé, & sont proportionnelles à la hauteur du baromêtre en ces endroits.

340. Nous avons dit que l'air se comprimoit dans la raison des poids, à très-peu près. Quoique l'expérience d'après laquelle nous l'avons prouvé, donne le rapport des poids pour celui des compressibilités, & le donne assez exactement; il ne faut pas conclure cependant qu'il en seroit de même quel que fût le poids dont on chargeât l'air. Il n'est pas vraisemblable qu'on puisse réduire un volume quelconque d'air, à occuper un espace infiniment petit, en le chargeant continuellement; non plus qu'à occuper un espace infini, en diminuant sa pression à l'infini. Cette extrême compressibilité, & cette extrême dilatabilité ne sont pas dans la Nature. Néanmoins lorsqu'il ne s'agit que de hauteurs médiocres, on peut supposer que

l'air, à différentes hauteurs, est comprimé dans la raison des poids dont il est chargé, & par-là, on peut déterminer à peu prè, à quelle hauteur doit se tenir le baromètre, en vertu du poid seul de l'air, à différentes hauteurs.

En effet, nous avons vu ci-dessus (331) que D étant la pesanteur spécifique ou la densité à une hauteur quelconque, la pression que l'air éprouvoit, ou pouvoit faire éprouver en cet endroit, étoit $\int D\,dx$; donc si on appelle h la hauteur du baromètre en cet endroit, & si on représente par 1 la densité du mercure, on aura $\int D\,dx = h$, ou plutôt..... $\int - D\,dx = h$, parce que x croissant, h diminue.

D'un autre côté, puisque l'air est d'autant plus dense, qu'il est plus chargé, sa densité ou sa pesanteur spécifique augmente comme les poids dont il est chargé, & par conséquent si on appelle H la hauteur du baromètre au niveau de la mer, & p la pesanteur spécifique de l'air, à ce même niveau; on aura $H : h :: p : D$; donc $h = \frac{DH}{p}$; donc..... $\int - D\,dx = \frac{HD}{p}$. Différencions cette équation en observant que p & H sont constans; on aura $- D\,dx = \frac{H\,dD}{p}$; d'où l'on tire $\frac{dD}{D} = \frac{-p\,dx}{H}$; donc (100) $lD = \frac{-px}{H} + lC$. Mais au niveau de la mer, c'est-à-dire, lorsque $x = 0$, on doit avoir $D = p$; donc $lp = lC$; donc $C = p$. On a donc $lD = \frac{-px}{H} + lp$; d'où l'on tire $lD - lp = \frac{-px}{H}$, ou $l\frac{D}{p} = \frac{-px}{H}$, ou enfin $\frac{D}{p} = e^{\frac{-px}{H}}$, e étant le nombre dont

le logarithme eſt 1 (90). On a donc $D = p e^{\frac{-px}{H}}$. Reprenant donc l'équation $\int - D dx = h$, & ſubſtituant pour D ſa valeur, on aura $h = \int - p e^{\frac{-px}{H}} dx$; intégrale que (122) l'on trouvera être $He^{\frac{-px}{H}}$; donc enfin..........

$h = He^{\frac{-px}{H}}$, ou $lh = lH - \frac{px}{H}$, qui donnera la hauteur h du baromètre, à la hauteur x au-deſſus du niveau de la mer, lorſqu'on connoîtra ſa hauteur H au niveau de la mer, & la peſanteur ſpécifique p de l'air, à ce même niveau.

Pour rendre cette expreſſion encore plus commode pour le calcul, on peut regarder $\frac{px}{H}$ comme le logarithme d'un certain nombre A; & ſuppoſer $\frac{px}{H} = lA$. Alors on aura $lh = lH - lA = l\frac{H}{A}$.

Mais il faut bien obſerver que dans l'équation $\frac{px}{H} = lA$, lorſqu'après la ſubſtitution des valeurs de p, x, & H, on aura déterminé $\frac{px}{H}$ & par conſéquent lA, ce logarithme eſt le logarithme hyperbolique; ainſi pour trouver le nombre A par le moyen des tables ordinaires de logarithmes, il faudra convertir ce logarithme en logarithme ordinaire, en le multipliant (88) par 0,43429448 &c.

A l'égard de l'équation $lh = l\frac{H}{A}$, quoique les loga-

rithmes qu'elle renferme soient hyperboliques, on peut les considérer comme logarithmes ordinaires, parce que si deux nombres ont des logarithmes égaux, dans un système, ils auront encore des logarithmes égaux dans tout autre système qui leur sera commun.

Pour donner quelque application de ce que nous venons de dire, proposons-nous de trouver quelle doit être la hauteur du baromètre au sommet du *Pic du Tériffe*; c'est-à-dire, de comparer celle qui résulteroit du calcul précédent, avec celle qu'on y a observée.

La hauteur de cette Montagne a été trouvée de 13158 pieds de Paris, ou 157896 pouces au-dessus du niveau de la mer. Au niveau de la mer, le mercure se tenoit à vingt-sept pouces dix lignes; & au sommet du Pic, il étoit à dix sept pouces cinq lignes; c'est-à-dire que l'expérience donne $h = 17^{po.} 5^{lig.}$. Voyons ce que donne le calcul.

La pesanteur spécifique de l'air est à peu près la 850e partie de celle de l'eau commune; & la pesanteur spécifique de celle-ci est à peu près la quatorzième partie de celle de mercure. On a donc..

$$p = \frac{1}{850 \times 14} = \frac{1}{11900}.$$

$$x = 157896^{po.}.$$

$$H = 27^{po} \tfrac{5}{6}.$$

Donc $\frac{px}{H} = \frac{157896}{11900 \times 27\frac{5}{6}} = 0,4767153$ qui est le logarithme hyperbolique de ce que nous avons appelé A; donc multipliant par 0,4342945, nous aurons 0,2070346 pour le logarithme ordinaire de A. Donc $l\frac{H}{A} = 1,2375306$; donc $lh = 1,2375306$, qui dans les tables ordinaires répond à 17,28. Donc $h = 17^{po.}, 28 = 17^{po.} 3^{lig.} \tfrac{1}{3}$. Or l'observa-

tion a donné $17^{po.}$ $5^{lig.}$; la différence entre le calcul & l'observation n'est donc que de $1^{lig.}\frac{2}{3}$.

Au reste, nous ne devons pas dissimuler qu'on ne doit pas regarder cette détermination, comme pouvant donner bien exactement la hauteur du baromètre, sur-tout à de grandes hauteurs, 1°. Parce qu'ainsi que nous l'avons déja observé, l'air ne se comprime pas proportionnellement aux poids, à toute distance. 2°. Parce qu'à des distances un peu considérables, la pesanteur diminue. 3°. Parce que la pesanteur spécifique p de l'air, est très-variable. 4°. Parce que les variations qui arrivent dans les hauteurs du baromètre, pouvant dépendre en partie du ressort de l'air dilaté par la chaleur, ou condensé par le froid, il faudroit connoître l'action de ces causes, à différentes hauteurs. 5°. Parce que les vapeurs & autres corps étrangers dont l'air est chargé, peuvent encore apporter beaucoup de modifications à cette détermination.

341. Une autre application que nous pouvons faire des mêmes principes, & qui a plus de rapport à notre objet, parce qu'elle est propre à donner une idée de la résistance que l'air oppose au mouvement des projectiles, ainsi que nous le verrons dans le volume suivant; c'est pour déterminer la densité de l'air à différentes hauteurs.

Nous avons trouvé ci-dessus $\frac{D}{p} = e^{\frac{-px}{H}}$ pour l'expression de cette densité, H étant la hauteur du mercure dans le baromètre au niveau de la mer, ou au point d'où l'on compte les x.

Soit a la hauteur à laquelle s'élèveroit l'atmosphère si son poids restant le même, elle avoit par-tout la même densité

p qu'au point d'où l'on compte les x. On aura............ $1 \times H = pa$, 1 marquant toujours la pesanteur spécifique du mercure. Substituant pour H sa valeur pa, on aura donc $\frac{D}{p} = e^{\frac{-x}{a}}$, & par conséquent............. $D = pe^{\frac{-x}{a}}$.

A l'égard de la quantité a, elle dépend du rapport de la pesanteur spécifique de l'air à celle de l'eau, dans le lieu dont il s'agit; par exemple, si la pesanteur spécifique de l'air est à celle de l'eau : : 1 : 850, ainsi que cela a lieu dans les températures moyennes, & à des élévations peu considérables au-dessus du niveau de la mer; alors l'air est capable, par sa pesanteur moyenne, de faire équilibre à une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur; ainsi la hauteur a sera $= 850 \times 32^{pi.} = 27200^{pi.}$.

Ainsi si l'on demande quelle seroit, dans ces mêmes suppositions, la densité à la hauteur de 1000 pieds, on aura $D = pe^{\frac{-1000}{27200}} = pe^{\frac{-10}{272}}$, ou $\frac{D}{p} = e^{\frac{-10}{272}}$, & par conséquent log. $\frac{D}{p} = \frac{-10}{272}$. Il faut donc connoître le nombre qui a pour logarithme hyperbolique $\frac{-10}{272}$, ou celui qui a pour logarithme ordinaire $\frac{-10}{272} \times 0{,}4342945$; c'est-à-dire, le nombre qui dans les Tables ordinaires répond à $-0{,}0159593$; c'est 0,964 à peu près; donc $\frac{D}{p} = 0{,}964$; donc.................. $D : p : : 1 : 0{,}964 : : 1000 : 964 : : 250 : 241$, c'est-à-dire, qu'à 1000 pieds de hauteur, la densité est diminuée

de $\frac{1}{15}$. On trouvera de même, qu'à la hauteur de 1000 toises, la densité seroit diminuée de $\frac{21}{100}$ à peu près; c'est-à-dire, de plus de $\frac{1}{5}$.

342. Après ce que nous venons de dire sur le poids & le ressort de l'air, & sur la pression des fluides en général, il est facile d'entendre comment l'eau s'élève dans les pompes.

Il y a trois parties principales à considérer dans une pompe. Les tuyaux, les soupapes & les pistons.

Le piston est un corps *ABCD* de base circulaire (*figures* 109, 110 & 111), qui peut parcourir la capacité intérieure du tuyau qu'on appelle *corps de pompe*, & qui le remplit exactement en la parcourant. La soupape *E* est destinée à permettre & à fermer alternativement le passage à l'eau. Le corps de pompe est le tuyau que parcoure le piston. *FGHK* est un autre tuyau lié au corps de pompe, & qui a son extrémité inférieure plongée dans l'eau dont je suppose que *RS* est le niveau.

Si l'on suppose qu'une puissance *P* (*fig.* 109) appliquée à la tige du piston, vienne à élever le piston. L'air renfermé dans l'espace *DVKHGFC* tendra, par son ressort, à occuper l'espace que le piston laissera libre; il soulèvera la soupape *E*, pour

entrer dans le corps de pompe; ſon reſſort diminuera à meſure qu'il s'étendra. Il exercera donc ſur la ſurface *GH* de l'eau un effort moindre que ne fait l'air naturel, ſur les parties environnantes *RG*, *HS*. L'excès de preſſion de la part de l'air extérieur, fera donc monter de l'eau dans le tuyau *GK* à une certaine hauteur *HN*, juſqu'à ce que le poids de cette colonne, joint au reſſort de l'air reſtant, ſoit égal au poids de l'air extérieur. Alors la ſoupape *E* ſe fermant d'elle-même; ſi l'on baiſſe le piſton, l'air contenu entre le piſton & la baſe *TV* du corps de pompe, augmentera de reſſort à meſure qu'on baiſſera; il fera effort contre la baſe du piſton, & s'échappera, ſi ſon reſſort étant devenu plus grand que celui de l'air extérieur, le piſton eſt en même-temps percé d'un trou recouvert d'une ſoupape *L*, qui puiſſe s'ouvrir, & ſe fermer comme la première.

Cet air une fois ſorti, la ſoupape *L* retombe, & ſi l'on recommence à lever le piſton, l'eau s'élèvera dans *FGHK*, à une plus grande hauteur, par la même raiſon que ci-devant; enſorte qu'après un certain nombre de coups de piſton, elle gagnera le corps de pompe, où étant une fois entrée, elle paſſera à chaque abaiſſement du piſton, à travers le trou dont il eſt percé, en levant la ſoupape, qui ſe fermant enſuite par ſon propre poids, retiendra au-deſſus d'elle, l'eau qui aura paſſé, & que l'on

élevera en même-temps que le piſton. Tel eſt le jeu de la *Pompe aſpirante.*

Quant à la *Pompe foulante*, voici ſes effets. Lorſqu'on fait deſcendre le piſton *PCD* (*fig.* 110) que je ſuppoſe, ici, placé au-deſſous du niveau de l'eau *RS*, il ſe fait un vide entre la ſoupape *E* qui eſt alors fermée, & la baſe du piſton. Le poids de l'eau agiſſant conjointement avec celui de l'air extérieur contre la ſoupape *L*, fait paſſer l'eau dans le corps de pompe. Lorſque l'eau ceſſe d'entrer, la ſoupape *L* ſe ferme. Alors ſi l'on remonte le piſton, il chaſſe devant lui l'eau qui eſt entrée, force la ſoupape *E* de ſe lever, & introduit l'eau dans la partie *TVYX*. Le piſton une fois élevé, la ſoupape *E* ſe ferme, & retient l'eau juſqu'à ce que, par une nouvelle opération ſemblable à la première, on en faſſe paſſer de nouvelle, qui s'élève dans *TVYX* à proportion du nombre de coups de piſton. Quelquefois le piſton eſt placé au-deſſus du niveau de l'eau; mais dans toute diſpoſition, cela s'explique d'une manière analogue. Tel eſt le jeu de la pompe foulante.

La pompe *aſpirante & foulante* eſt ainſi nommée, parce qu'elle réunit les effets des deux autres. Le piſton *ABCD* (*fig.* 111) s'élevant, fait entrer l'eau dans l'eſpace *CDTVO* par le moyen du tuyau *FGHK*, comme dans la pompe aſpirante,

Puis, lorſqu'il s'abaiſſe, il foule l'eau contenue dans cet eſpace, laquelle ne pouvant échapper par la ſoupape *E* qui ſe ferme d'elle-même, lève la ſoupape *L*, & paſſe dans le tuyau *MOmn*. On peut varier beaucoup la conſtruction & la diſpoſition des parties des pompes; mais leurs effets s'expliqueront toujours facilement, par ceux que nous venons d'expoſer.

343. Voyons maintenant les propriétés fondamentales de ces machines.

Par le moyen de la pompe foulante, on peut élever l'eau à telle hauteur que l'on veut, pourvu qu'on y emploie une force ſuffiſante. Mais l'eſtimation de cette force exige plus d'une conſidération. Il faut avoir égard aux dimenſions du piſton & des tuyaux; à la hauteur à laquelle on veut élever l'eau; à la vîteſſe avec laquelle on veut l'élever. Nous n'examinerons point ici cette queſtion. Quant à préſent nous nous bornerons à quelques-uns des élémens qui peuvent ſervir à la réſoudre.

Il eſt conſtant que la puiſſance néceſſaire, pour élever l'eau à une hauteur propoſée, doit du moins être capable de faire équilibre à la preſſion que la baſe du piſton éprouveroit, ſi lorſqu'une lame de fluide a atteint la hauteur propoſée, le tout demeuroit en équilibre. C'eſt cette preſſion que nous allons évaluer ici.

En

En général, la puissance doit être au moins capable de soutenir le poids d'une colonne d'eau qui auroit pour base celle du piston, & pour hauteur la distance depuis le niveau de l'eau *RS* (*fig.* 110) jusqu'à la lame supérieure *XY*.

En effet, lorsque la base *DC* du piston est au-dessous du niveau de l'eau *RS*, il est visible que la puissance n'a point à soutenir la pression de l'eau comprise entre *RS* & *DC*, parce que cette pression est contre-balancée par celle de l'eau environnante qui se transmet par l'ouverture inférieure du corps de pompe. La puissance n'a donc à soutenir que la pression qu'exerce sur la surface *DC*, le fluide compris entre *RS* & *XY*. Or cette pression doit s'estimer par celle d'un seul filet qui auroit pour hauteur la distance de *RS* à *XY*, doit, dis-je, s'estimer par la pression de ce filet, répétée autant de fois qu'il y a de points dans *DC*; elle est donc en effet égale au poids d'une colonne d'eau, qui auroit pour base *DC*, & dont la hauteur seroit celle de *XY* au-dessus du niveau de l'eau.

Lorsque le piston est au-dessus du niveau supposé en *R'S'*; il est évident que l'eau contenue entre *DC* & *R'S'* ne charge point le piston. Mais comme elle ne peut alors être soutenue que par la pression que l'air extérieur exerce sur la

ſurface de l'eau environnante, cette preſſion de l'air n'eſt donc plus capable de faire équilibre à la preſſion de celui qui agit à la ſurface *XY*. Par conſéquent la ſurface *DC* du piſton eſt ſurchargée d'un poids équivalent à la colonne d'eau qui auroit *DC* pour baſe, & dont la hauteur ſeroit égale à la diſtance de *DC* à *R'S'*. Cette preſſion jointe à celle qu'exerce ſur *DC*, l'eau contenue entre *DC* & *XY*, & qui a pour valeur le poids d'une colonne d'eau qui auroit *DC* pour baſe, & dont la hauteur ſeroit égale à la diſtance de *DC* à *XY*, fait donc, encore, le poids d'une colonne d'eau qui auroit *DC* pour baſe, & dont la hauteur ſeroit celle de *XY* au-deſſus du niveau *R' S'* de l'eau.

344. A l'égard de la pompe aſpirante; pour juger de ſon effet, il ne ſuffit pas d'évaluer la puiſſance, il faut examiner, avant tout, ſi l'eau pourra parvenir juſqu'au piſton, & même s'élever au-deſſus; car il y a des circonſtances où l'eau peut s'arrêter à un certain terme, quelque nombre de coups de piſton que l'on donne.

Pour comprendre ceci, imaginons que l'eau ſoit déja parvenue en *I* (*fig.* 109), la ſituation actuelle du piſton étant la plus baſſe qu'il puiſſe avoir; & ſuppoſons, pour plus de ſimplicité, que la pompe eſt d'une groſſeur uniforme par-tout.

Il eſt clair que l'air compris dans l'eſpace *CDIZ* eſt de même force, de même reſſort, que l'air extérieur (du moins abſtraction faite du poids de la ſoupape *L*, & de la réſiſtance de ſon frottement). Car s'il avoit plus de reſſort, il s'échapperoit en levant cette ſoupape. Concevons maintenant que le jeu du piſton, ou l'étendue qu'il parcoure à chaque levée, ſoit *DO*. Lorſque la baſe *CD* ſera arrivée en *QO*, l'air qui occupoit l'eſpace *CDIZ*, tend à ſe répandre dans l'eſpace *QOIZ*; & ſi l'eau ne monte pas davantage, il s'y répandra en effet. Alors ſon reſſort ſera moindre que celui de l'air naturel, dans le rapport de *CDIZ* à *QOIZ*, ou dans le rapport de *DI* à *OI*. Donc ſi cette force de reſſort, jointe au poids de la colonne d'eau qui auroit, pour hauteur, la diſtance de *ZI* à *RS*, fait un poids égal à 32 pieds d'eau en hauteur, qui eſt l'effort que l'air peut exercer ſur la ſurface de l'eau en *RS*, il eſt clair qu'il y aura équilibre, & que l'eau ne montera plus; ſi ce poids eſt plus grand que 32 pieds, elle retombera avant que la ſoupape *E* puiſſe ſe fermer; & s'il eſt plus petit que 32 pieds, l'eau continuera de monter.

Voyons donc comment on peut déterminer ce poids.

Nommons *h* la hauteur depuis le point *O* juſqu'au niveau

RS; i le jeu du piſton, ou l'eſpace DO qu'il parcoure; x la diſtance OI. Nous aurons $DI = x - i$, & la hauteur du point I ſera $h - x$.

Puiſque l'air renfermé dans $CDIZ$, a le même reſſort que l'air extérieur; ſa force peut donc être meſurée par une colonne d'eau de 32 pieds en hauteur; ainſi puiſque celle de cet air répandu dans l'eſpace $QOIZ$, doit être moindre, dans le rapport de DI à OI, cette force ſera le quatrième terme de cette proportion $x : x - i :: 32 : \frac{32 \times (x - i)}{x}$.

Mais la force que l'eau compriſe entre ZI & RS, exerce contre la preſſion extérieure de l'air, eſt meſurée par la hauteur $h - x$; donc celle du reſſort de l'air répandu dans l'eſpace $QOIZ$, jointe à celle du poids de l'eau compriſe depuis IZ juſqu'en RS, forme un poids total de $\frac{32 \times (x - i)}{x} + h - x$. Or pour que l'eau puiſſe toujours monter, il faut que ce poids ſoit moindre que celui d'une colonne d'eau de 32 pieds; donc ſi l'on nomme y, ce dont il eſt moindre, on aura.........................

$\frac{32 (x - i)}{x} + h - x = 32 - y$; d'où l'on tire $- 32 i + hx - xx = - xy$; & par conſéquent $x = \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} y \mp \sqrt{\left[\left(\frac{h + y}{2} \right)^2 - 32 i \right]}$.

Pour que l'eau s'arrête, il eſt clair qu'il faut que y ſoit zéro. Et comme on a alors $x = \frac{1}{2} h \pm \sqrt{(\frac{1}{4} hh - 32 i)}$, dont les deux valeurs ſont réelles ſi $\frac{1}{4} hh$ eſt plus grand que $32 i$; on peut donc dire que *lorſque le carré de la moitié de la plus grande hauteur de la baſe du piſton, au-deſſus du niveau de l'eau, eſt plus grand que 32 fois le jeu du*

piston, il y a toujours deux points où l'eau peut s'arrêter dans la pompe aspirante. Ensorte que la pompe doit être réputée mauvaise, si le piston lorsqu'il est le plus bas, se trouve entre ces deux points.

Mais si $32i$ est plus grand que $\frac{1}{4}hh$, les deux valeurs de x que l'on a en supposant $y = 0$, deviennent imaginaires; ce qui annonce que dans une pompe construite suivant cette condition, il est impossible que y soit zéro; donc la pression de l'air extérieur sera toujours plus forte, & l'eau ne s'arrêtera point. Donc, *pour que la pompe aspirante produise infailliblement son effet, il faut que le quarré de la moitié de la plus grande hauteur du piston au-dessus du niveau de l'eau, soit plus petit que 32 fois le jeu du piston.*

Si de l'équation $-32i + hx - xx = -xy$, que nous avons trouvée ci-dessus, on tire la valeur de y, on aura

$$y = \frac{xx - hx + 32i}{x}.$$

Concevons maintenant que AB (*fig.* 112 & 113) représentant la plus grande hauteur du piston au-dessus du niveau de l'eau, & AD le jeu du piston, on donne successivement à x, pour valeurs, les différentes parties AP de la ligne AB, & que l'on porte sur les perpendiculaires PM, les valeurs de y qui résulteront de ces substitutions; on aura une courbe MMC, qui (*fig.* 112) tant que $\frac{1}{4}hh$ sera plus grand que $32i$, coupera AB en deux points I & I'; ensorte qu'il y aura des ordonnées PM, de part & d'autre de AB; les ordonnées qui sont à la droite, marquant les valeurs positives de y; & celles qui sont à la gauche, marquant les valeurs négatives.

On voit donc que tant que $\frac{1}{4}hh$ est plus grand que $32i$,

la pression de l'air extérieur est toujours la plus forte jusqu'à ce que l'eau ait atteint la hauteur BI'. Qu'à ce point elle s'arrêtera (abstraction faite du mouvement acquis), parce que la valeur de y est zéro. Mais si l'eau par son mouvement acquis, passe la hauteur BI', parvient à quelque point entre I & I', elle ne pourra s'y arrêter, mais elle descendra (en supposant que la soupape ne s'y oppose pas) parce que la valeur de y étant négative, marque que la pression de l'air extérieur est plus foible, que les efforts réunis de l'eau & du ressort de l'air intérieur. Si l'air atteint la hauteur du point I, elle pourra s'y arrêter par la même raison que ci-dessus. Mais si elle passe une fois le point I, alors il n'y a plus à craindre qu'elle descende, parce que les ordonnées PM comprises entre A & I étant toutes positives, font voir que la pression de l'air extérieur est toujours la plus forte, depuis la hauteur du point I, jusqu'à celle du point A.

Lorsqu'au contraire la valeur de $\frac{1}{4}hh$ est plus petite que $32i$ (*fig.* 113), la courbe ne coupe plus l'axe AB; toutes les ordonnées PM sont positives; la pression de l'air extérieur est donc toujours la plus forte. Il n'y a donc pas d'arrêt à craindre. Ce qui confirme & éclaircit ce que nous avons dit ci-dessus.

345. Si la pompe aspirante étoit établie à une hauteur ou à une profondeur sensiblement différente de celle à laquelle le poids de l'air est équivalent à une colonne d'eau de 32 pieds; il faudroit, dans tout ce que nous venons de dire, mettre moins ou plus de 32 pieds. Ce moins ou plus peut se déterminer par le baromètre, en comptant

autant de fois 14 lignes de plus ou de moins à l'égard de 32 pieds, que le mercure marquera de lignes au-dessus, ou au-dessous de 27 pouces $\frac{1}{2}$.

Dans le calcul précédent, nous avons regardé la pompe, comme si elle étoit d'une grosseur uniforme; lorsqu'elle ne l'est point, comme dans la *fig.* 109, la solution n'est pas plus difficile pour cela. Pour calculer l'effort de l'air intérieur, lorsqu'on suppose que l'eau n'est pas encore dans le corps de pompe *XV*; lorsqu'elle est en *MN*, par exemple, il faut faire cette proportion; l'espace *QOVNMTQ* : *CDVNMTC* : : 32P sont à un quatrième terme, qui étant joint au poids de la colonne d'eau qui a pour hauteur *NH*, doit ensuite être égalé à $32 - y$, comme ci-dessus. Au surplus, quand le tuyau d'aspiration *FG* est d'un diamètre plus petit que le corps de pompe, si la condition que nous avons exigée ci-dessus à lieu, la pompe ne peut manquer d'avoir son effet; car l'air se dilate encore plus facilement dans celle-ci, que si elle étoit d'une grosseur uniforme.

346. Quant à l'effort dont la puissance doit être capable pour soutenir l'eau à une hauteur déterminée *XY* (*fig.* 109); il se mesure, ainsi que nous l'avons vu pour la pompe foulante, par le poids d'une colonne d'eau qui auroit pour base la base *DC* du piston, & pour hauteur celle de *XY* au-dessus du niveau *RS*. (Nous faisons abstraction du frottement & du poids du piston). Cela se démontre par un raisonnement semblable à celui que nous avons employé pour la pompe

foulante, lorſque le piſton eſt au-deſſus du niveau de l'eau $R'S'$ (*fig.* 110).

347. La peſanteur & le reſſort de l'air ſervent à expliquer beaucoup d'autres faits : nous nous bornerons à en rapporter quelques-uns.

Si dans un vaſe où il y a de l'eau, ou tout autre fluide, on plonge (*fig.* 114) la branche la plus courte d'un tube recourbé *DEF* (qu'on appelle ſiphon); & qu'on aſpire, en ſuçant ou autrement, l'air contenu dans ce ſiphon; l'eau montera & ſortira par *F*, juſqu'à ce que, dans le vaſe, elle ſoit deſcendue à l'ouverture *D*.

La raiſon de ce fait eſt que lorſqu'on a fait ſortir l'air renfermé dans *DEF*, la preſſion de l'air extérieur agit ſur la ſurface *AB*, force le fluide de monter dans le ſiphon, & de s'écouler par la branche *EF*. Et quoique lorſque l'écoulement eſt commencé, l'air preſſe le fluide au point *F*, avec une force égale, à très-peu près, à celle qui preſſe la ſurface de l'eau dans le vaſe; néanmoins la lame *F* eſt preſſée en ſens contraire, par toute la colonne d'eau *IF*; cette colonne doit donc tomber, mais en tombant elle tend à faire un vide en *I* qui ne peut manquer d'être rempli par l'action toujours préſente de la preſſion de l'air ſur la ſurface de l'eau dans le vaſe.

On voit, par ce raiſonnement, que pendant l'écoulement, l'air n'agit qu'avec un effort proportionnel à la différence *IF* de niveau entre *F* & la ſurface de l'eau dans le vaſe; enſorte que l'écoulement ſera d'autant plus prompt, que les deux branches du ſiphon différeront davantage; ainſi ſi *F* & *D* étoient de niveau, l'écoulement n'auroit pas lieu. On dit communément que la branche *EF* doit être plus longue que la branche *ED*;

mais on voit qu'en s'exprimant ainsi, on doit entendre que la hauteur verticale de *E* au-dessus de *F*, doit être plus grande que celle de *E* au-dessus de *D*. La longueur absolue n'y fait rien. On pourroit rendre *DE* beaucoup plus longue que *EF*, en contournant *DE* de diverses manières; tant que le point *D* sera plus haut que *F*, le fluide s'écoulera jusqu'à ce qu'il soit arrivé en *D*, pourvu que la hauteur de *E* au-dessus de *D* ne passe pas 32 pieds.

348. Lorsqu'en appliquant les lèvres à l'ouverture d'un flacon, on aspire la liqueur qui y est contenue, les lèvres s'appliquent fortement sur les bords de l'ouverture ; & on a d'autant plus de peine à les dégager, qu'on a aspiré plus fortement.

C'est qu'en aspirant une partie de l'air contenu dans le flacon, on diminue le ressort de l'air restant, à proportion de ce qu'on en diminue la quantité ; il n'est donc plus en état d'opposer du dedans au dehors une pression égale à celle que l'air extérieur exerce du dehors au dedans. Cette différence peut aller jusqu'à faire casser le flacon, sur-tout s'il est plat.

349. Par une raison semblable, on explique pourquoi on a de la peine à ouvrir un soufflet lorsqu'on en bouche l'ouverture. C'est qu'en écartant les panneaux, l'air intérieur se répand dans un plus grand espace, & diminue de ressort à proportion ; l'air extérieur presse donc plus du dehors au dedans, que l'air intérieur ne presse du dedans au dehors.

TABLE DES PESANTEURS SPÉCIFIQUES des Matières qui sont le plus d'usage.

AVERTISSEMENT.

LES nombres qui correspondent à chaque espèce de matière dans la Table suivante, marquent le rapport du poids d'un volume quelconque de cette matière, à un pareil volume d'eau de pluie ; & celui-ci est représenté par l'unité. Le poids d'un pied cube d'eau de pluie, est de 70£ ; ainsi pour conclure de cette Table le poids en livres, d'un pied cube d'une autre matière quelconque, on multipliera par 70, le nombre qui, dans cette Table, correspond à cette matière.

Par exemple, le nombre qui répond au mercure, est 13,593 ; il signifie que le mercure pèse 13 fois & $\frac{593}{1000}$. de fois autant que l'eau. Multipliant 13,593 par 70, on aura 951£,51 ou à peu près 951£½ pour le poids d'un pied cube de mercure.

PESANTEURS SPÉCIFIQUES de quelques Corps solides.

Acier flexible ou non trempé	7,738.
Acier trempé	7,704.
Alun	1,714.

Antimoine d'Allemagne	4,000.
Antimoine de Hongrie	4,700.
Ardoiſe bleue	3,500.
Argent de coupelle	11,091.
Argile	1,929.
Bois d'Aulne	0,530.
de Buis	1,030.
de Bréſil	1,030.
de Cèdre	1,613.
de Chêne verd	1,143.
de Chêne ſec	0,857.
d'Ébène	1,177.
d'Érable	0,755.
de Frène	0,845.
de Gaïac	1,337.
de Hêtre	0,854.
de Noyer	0,600.
d'Orme	0,600.
d'Oſier	0,543.
de Sapin	0,550.
Borax	1,720.
Brique	1,857.
Caillou	2,542.
Charbon de terre	1,240.
Cinabre naturel	7,300.
Cinabre artificiel	8,200.
Cire jaune	0,995.
Corne de Bœuf	1,840.
Corne de Cerf	1,875.
Cuivre jaune	7,829.
Cuivre rouge	9,257.
Étain pur	7,320.

Étain allié d'Angleterre	7,471.
Fer fondu	7,114.
Fer forgé	8,286.
Gomme arabique	1,375.
Ivoire	1,825.
Litharge d'or	6,000.
Litharge d'argent	6,044.
Manganèze	3,530.
Marbre	2,700.
Mercure	13,593.
Nitre	1,900.
Nitre réduit en sel fixe, par le feu	2,745.
Or d'Essai ou de Coupelle	15,640.
Pierre calaminaire	5,000.
hémaitte ou sanguine	4,360.
à fusil, opaque	2,542.
à fusil, transparente	2,641.
de Liais	2,371.
de Saint-Leu	1,643.
Plâtre	1,228.
Plomb	11,828.
Poix	1,150.
Poudre de guerre	0,914.
Sable de rivière	1,900.
Sel Gemme	2,143.
Soufre vif	2,000.
Soufre commun	1,800.
Verd-de-gris	1,714.
Verre blanc	3,150.
Vitriol d'Angleterre	1,880.

PESANTEURS spécifiques de quelques Fluides.

Air	0,001$\frac{1}{5}$.
Eau de pluie	1,000.
distillée	0,993.
de rivière	1,009.
de mer	1,030.
régale	1,234.
forte	1,300.
Esprit de nitre	1,315.
rectifié	1,610.
de Sel marin	1,130.
de Tartre	1,073.
de Térebenthine	0,874.
de Vin, rectifié	0,866.
de Vitriol	1,203.
Huile de Lin	0,932.
d'Olive	0,913.
de Térébenthine	0,792.
Vin de Bourgogne	0,953.
Vinaigre de Vin	1,011.
Vinaigre distillé	1,030.

FIN.

TABLE DES MATIERES.

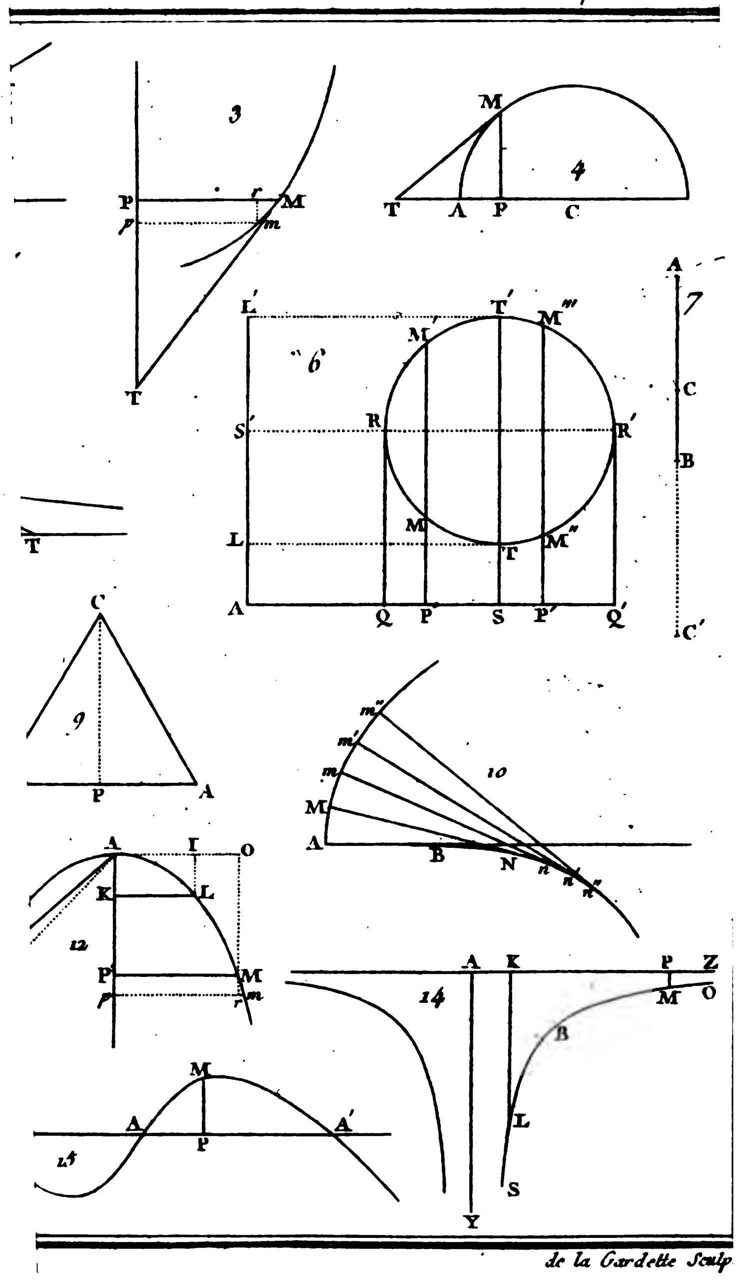
PRINCIPES DE CALCUL qui servent d'introduction aux Sciences Physico-mathématiques.

PRINCIPES généraux de la Mécanique.

DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES, & des Corps solides qui y sont plongés.

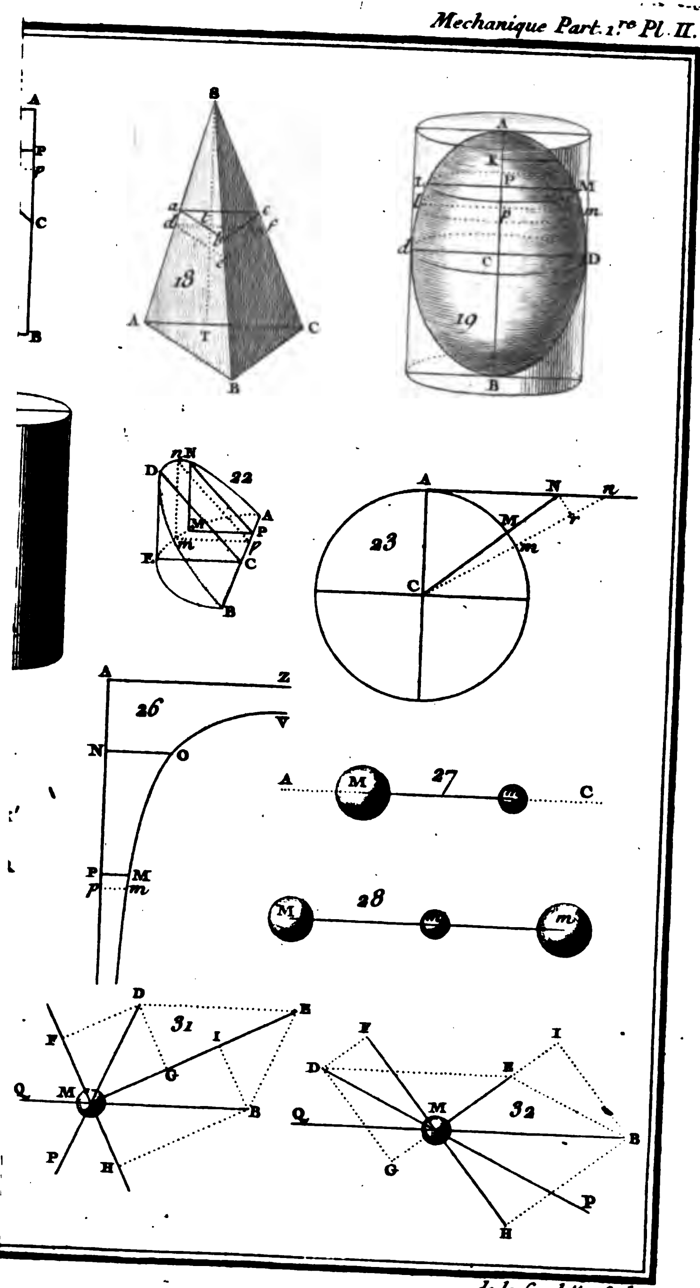
Fin de la Table des Matières.

PRINTED IN FRANCE

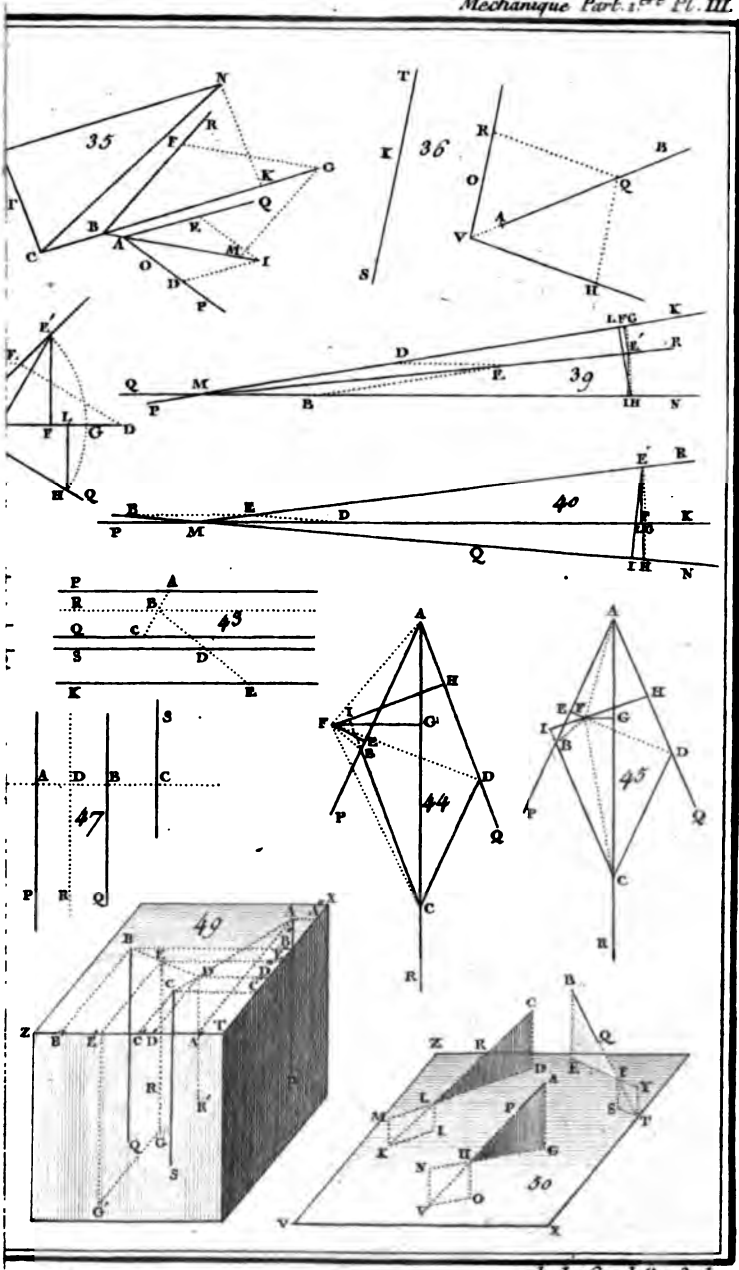


de la Gardette Sculp.

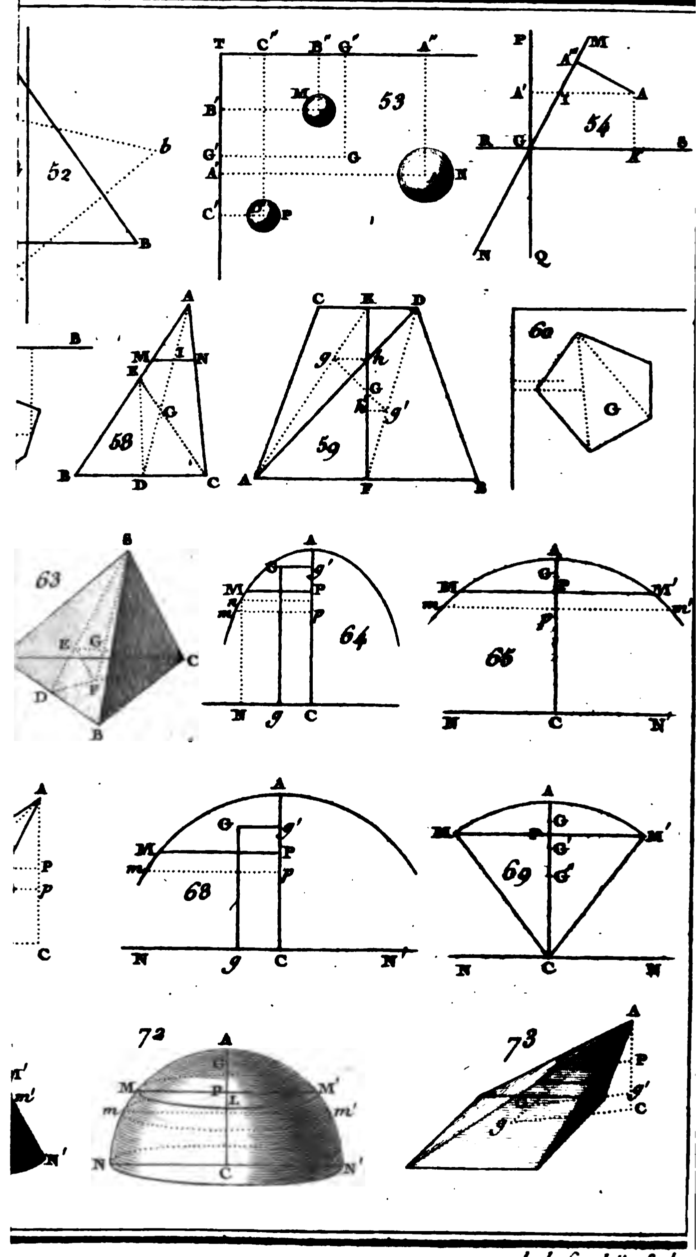




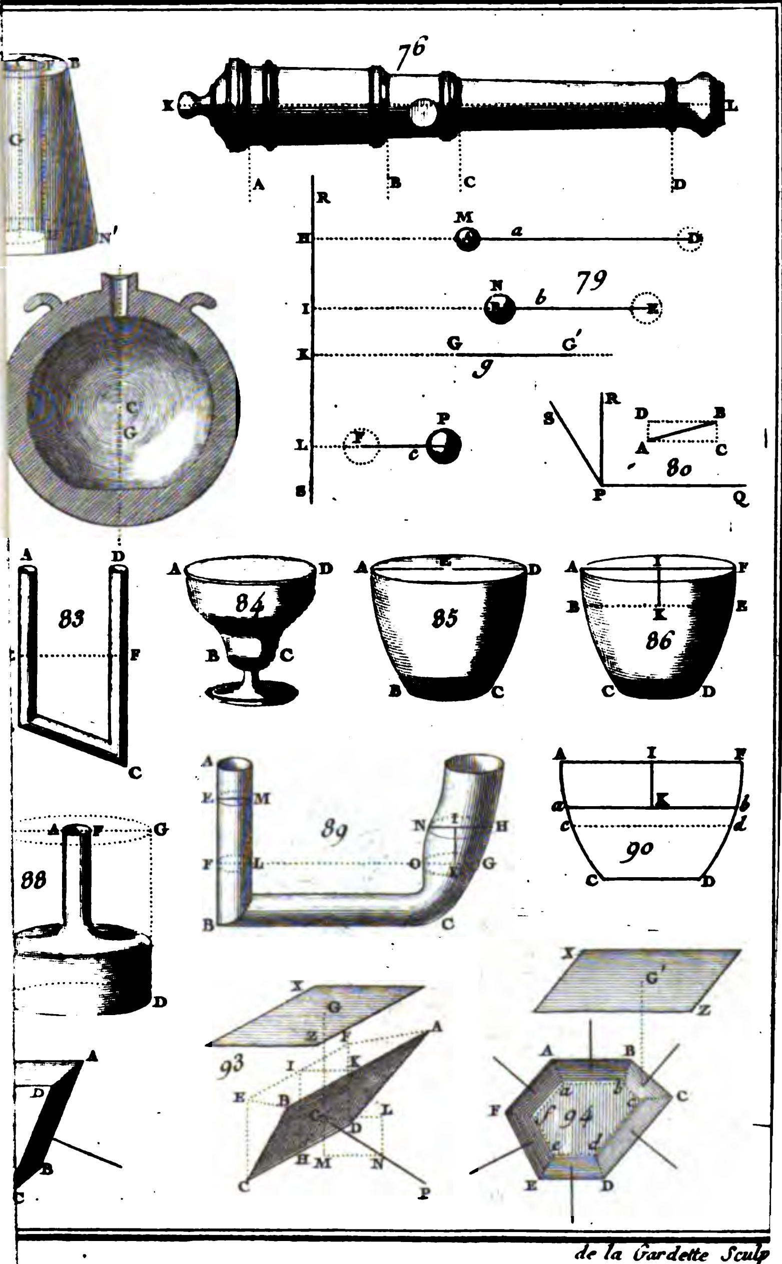
de la Gardette Sculp.



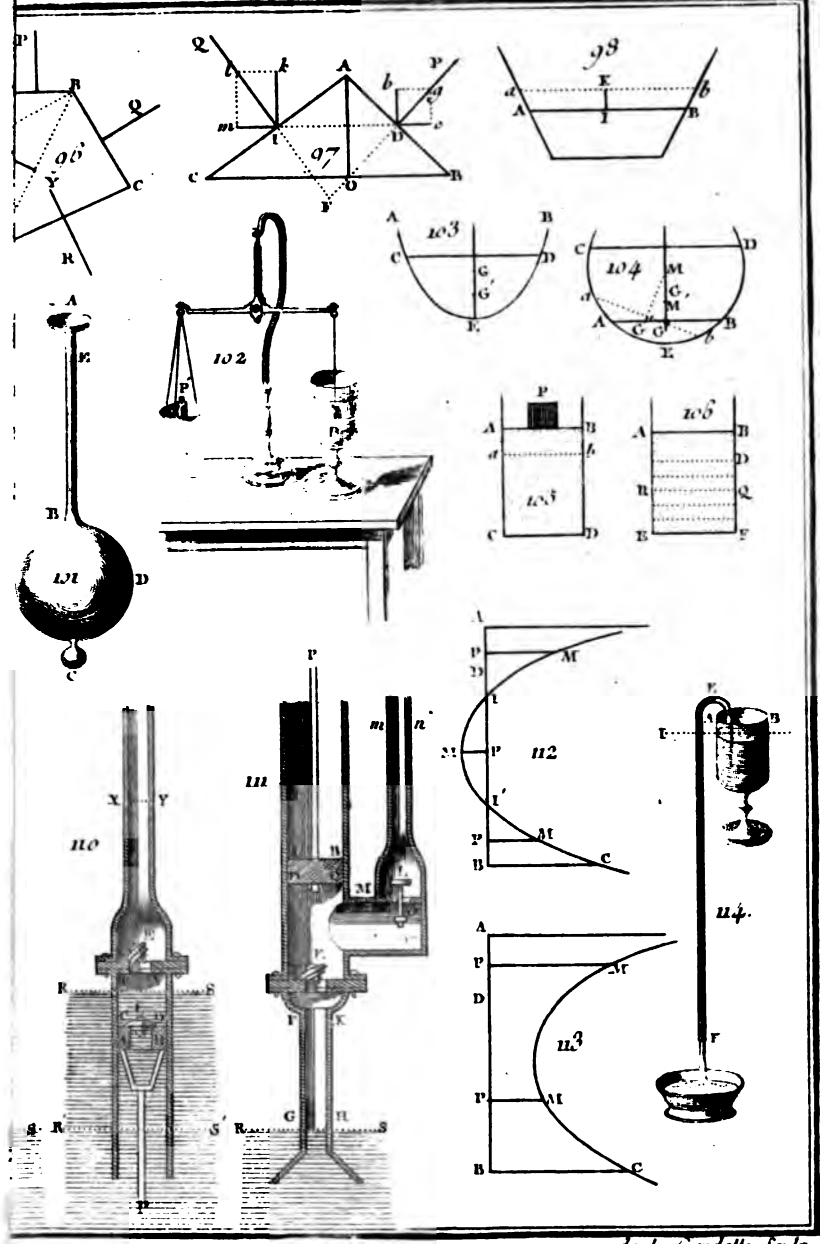
de la Gardette Sculp.



de la Gardette Sculp.

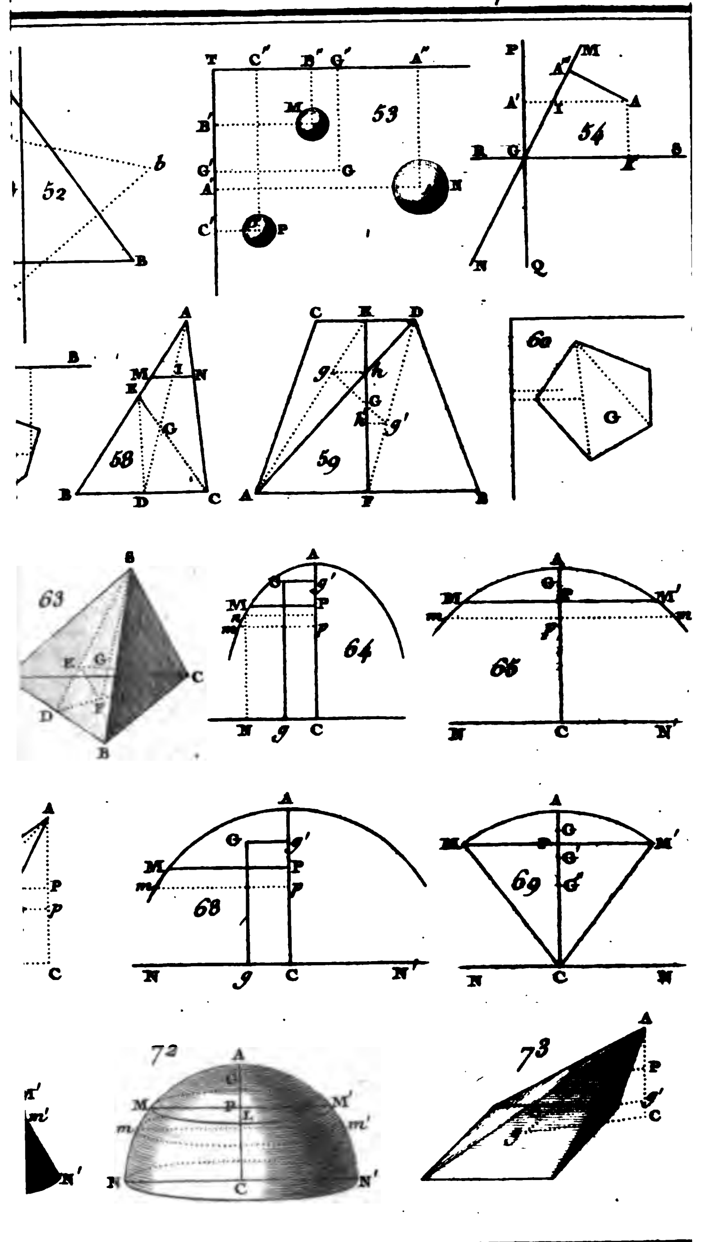


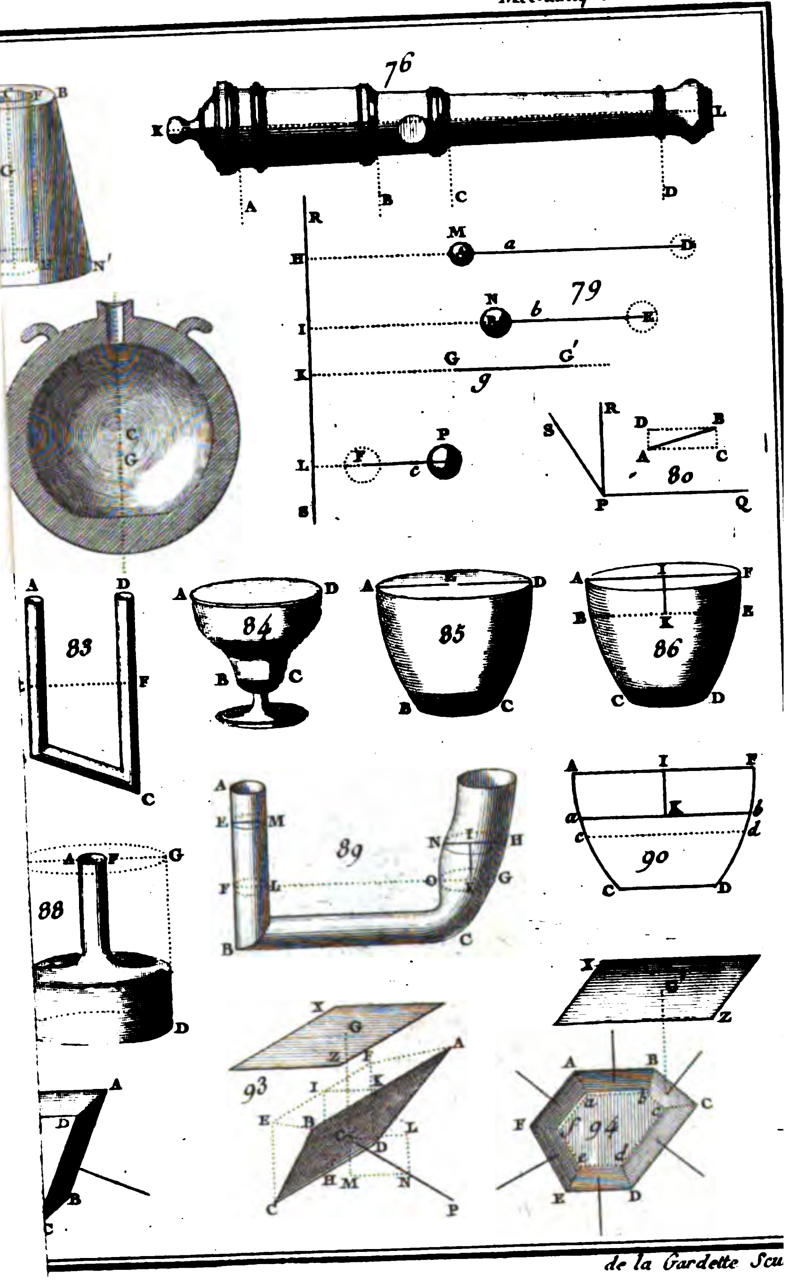
de la Gardette Sculp



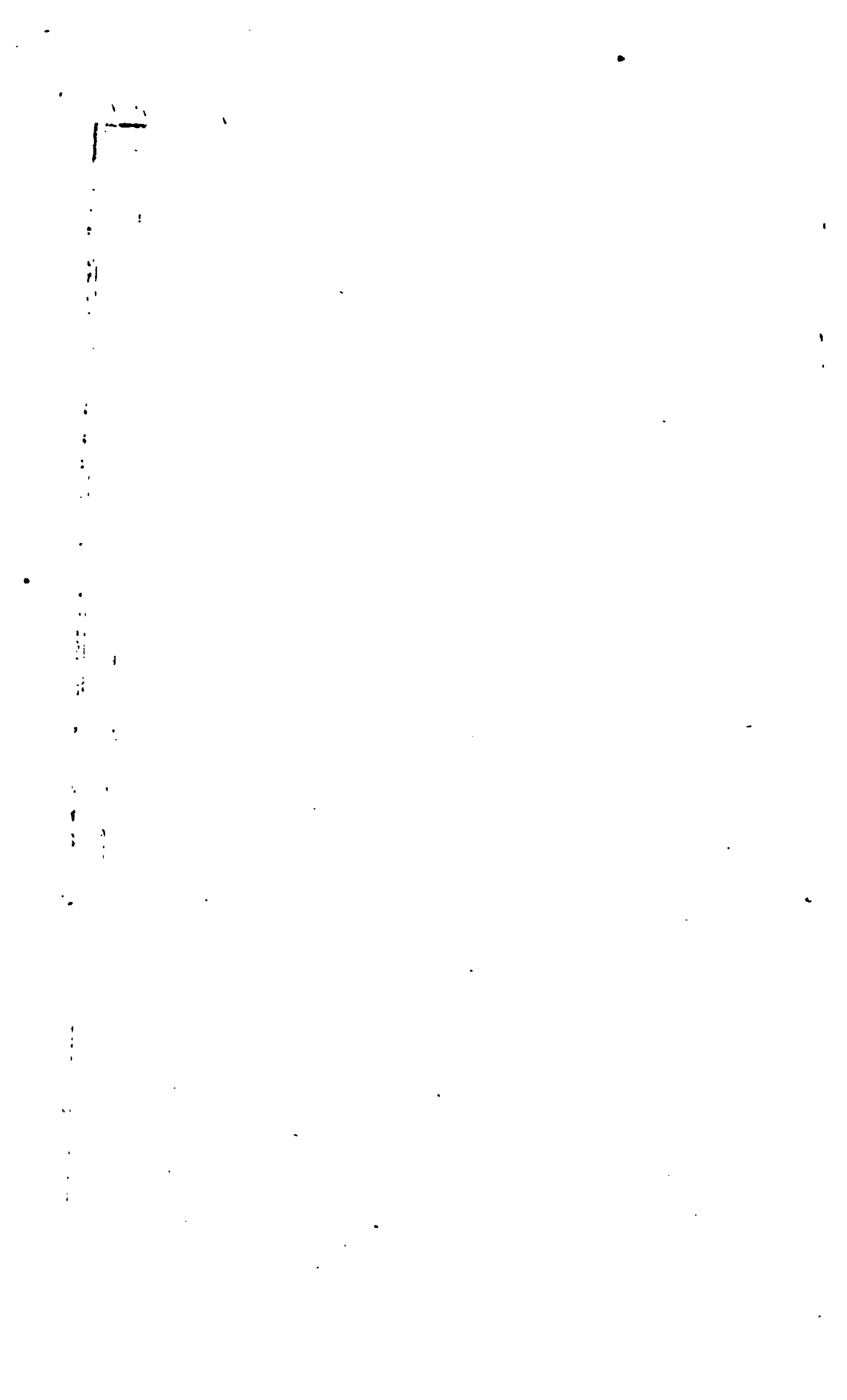
de la Gardette Sculp.

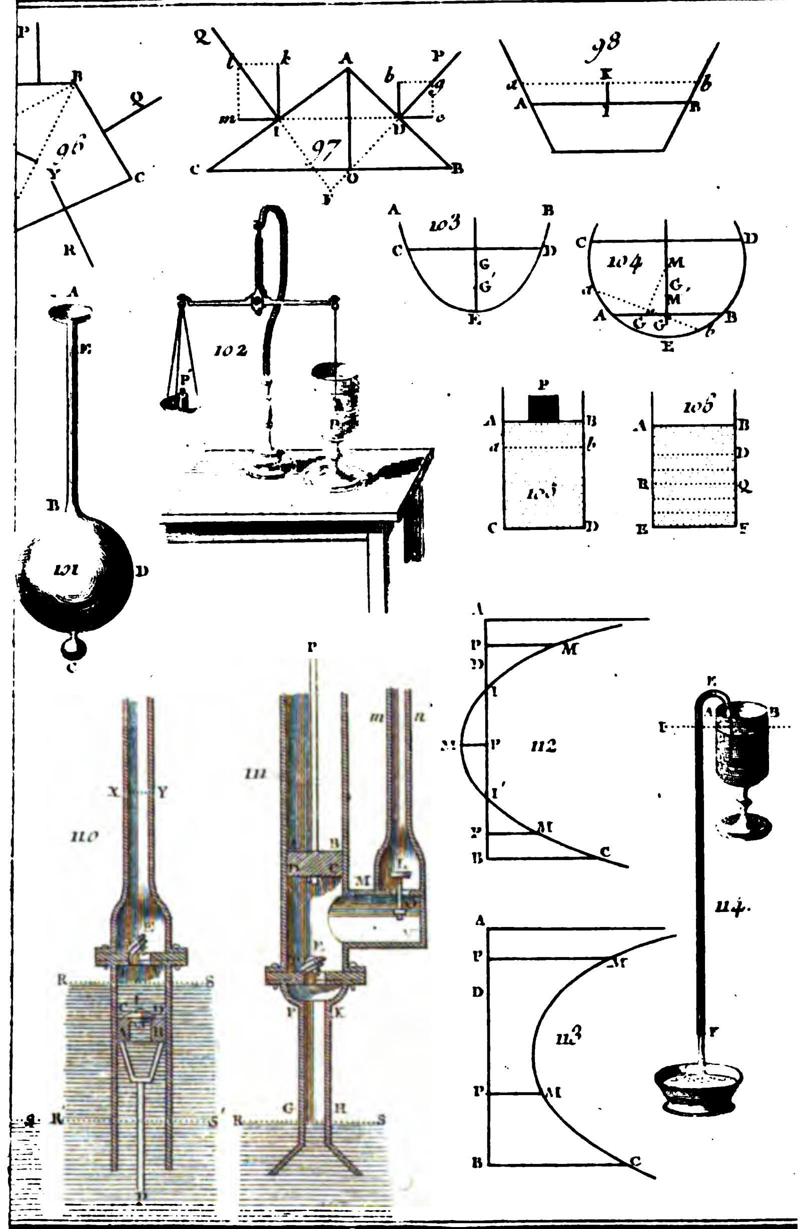

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06524 6442





de la Gardette Scu





de la Gardette Sculp